

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

**КЛАСИЧНА ДИНАМІКА  
У НЬЮТОНІВСЬКОМУ ТА ЛАГРАНЖЕВОМУ  
ФОРМАЛІЗМІ**

Навчально-методичний посібник

Харків – 2019

УДК 531(075.8)  
К 47

**Рецензенти:**

**Є. С. Сиркін** – доктор фіз.-мат. наук, провідний наук. співр. ФТІНТ НАН України, професор кафедри загальної та експериментальної фізики Харківського національного університету «ХП»;

**Г. І. Рашба** – кандидат фіз.-мат. наук, в. о. завідувача кафедри теоретичної фізики імені академіка І. М. Ліфшиця Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

*Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради  
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна  
(протокол № 2 від 29 листопада 2017 року)*

К 47 Класична динаміка у ньютонівському та лагранжевому формалізмі : навч.-метод. посіб. / О. В. Єзерська, О. С. Ковальов, З. О. Майзеліс, Т. С. Чебанова. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – 148 с.

ISBN 978-966-285-508-1

Цей навчально-методичний посібник призначений для студентів фізичних спеціальностей, які вивчають теоретичну механіку, і містить приклади та задачі, розв'язок яких сприяє більш глибокому розумінню фізичних ідей механіки, розвитку необхідних практичних навичок у розв'язанні задач класичної механіки у формалізмах Ньютона та Лагранжа.

**УДК 531(075.8)**

ISBN 978-966-285-508-1

© Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2019

© Єзерська О. В., Ковальов О. С., Майзеліс З. О., Чебанова Т. С., 2019

© Дончик І. М., макет обкладинки, 2019

## ЗМІСТ

Передмова .....	5
1. Ньютонівська механіка .....	6
1.1. Основні принципи ньютонівської механіки .....	6
1.2. Рух під дією сили, що залежить тільки від часу .....	8
Задачі до параграфу 1.2 .....	8
1.3. Рух під дією сили, що залежить тільки від положення частинки .....	10
Задачі до параграфу 1.3 .....	11
1.4. Рух під дією сили, що залежить тільки від швидкості .....	13
Задачі до параграфу 1.4 .....	14
1.5. Рух під дією більш складних сил .....	15
Задачі до параграфу 1.5 .....	16
1.6. Динаміка системи із двома ступенями свободи .....	17
Задачі до параграфу 1.6 .....	23
1.7. Динаміка систем зі зв'язками .....	24
Задачі до параграфу 1.7 .....	26
1.8. Розв'язки та відповіді до розділу 1 .....	26
2. Криволінійні координати .....	48
2.1. Криволінійні координати у двовимірному просторі .....	48
Задачі до параграфу 2.1 .....	52
2.2. Плоскі полярні координати .....	53
Задачі до параграфу 2.2 .....	54
2.3. Плоскі еліптичні координати .....	55
Задачі до параграфу 2.3 .....	56
2.4. Плоскі параболічні координати .....	57
Задачі до параграфу 2.4 .....	58
2.5. Плоскі біполярні координати .....	58
Задачі до параграфу 2.5 .....	59
2.6. Рішення та відповіді до розділу 2 .....	59
3. Лагранжева механіка .....	69
3.1. Основні принципи лагранжевої механіки .....	69
3.2. Інтегрування рівнянь руху .....	70
Задачі до параграфу 3.2 .....	73
3.3. Застосування законів збереження при інтегруванні рівнянь руху .....	74
3.3.1. Закон збереження енергії .....	74
Задачі до параграфу 3.3.1 .....	74
3.3.2. Коливання в консервативних системах .....	75
Задачі до параграфу 3.3.2 .....	76
3.3.3. Закон збереження імпульсу .....	76
Задачі до параграфу 3.3.3 .....	76

3.3.4. Інтеграл руху (енергія й імпульс) у системах із двома ступенями свободи.....	77
Задачі до параграфу 3.3.4.....	77
3.3.5. Інтеграл руху (енергія й кутовий момент) у системах частинок з радіально симетричним потенціалом взаємодії.....	78
Задачі до параграфу 3.3.5.....	80
3.3.6. Інтеграл руху й розсіювання частинок.....	81
Задачі до параграфу 3.3.6.....	83
3.4. Перетворення змінних у лагранжевій механіці.....	83
3.4.1. Перетворення координат.....	84
Задачі до параграфу 3.4.1.....	85
3.4.2. Перетворення координат і часу.....	85
Задачі до параграфу 3.4.2.....	86
3.4.3. Перехід до неінерціальної системи відліку.....	86
Задачі до параграфу 3.4.3.....	87
3.4.4. Перетворення енергії та імпульсів при зміні координат.....	88
Задачі до параграфу 3.4.4.....	89
3.5. Розв'язки та відповіді до розділу 3.....	90
4. Тривимірні криволінійні координати.....	121
4.1. Криволінійні координати в тривимірному просторі.....	121
Задачі до параграфу 4.1.....	124
4.2. Загальні циліндричні координати.....	124
4.2.1. Циліндричні полярні координати.....	124
Задачі до параграфу 4.2.1.....	125
4.2.2. Циліндричні еліптичні координати.....	126
Задачі до параграфу 4.2.2.....	127
4.2.3. Циліндричні параболічні координати.....	127
Задача до параграфу 4.2.3.....	128
4.3. Обертально-симетричні координати.....	128
4.3.1. Сферичні координати.....	129
Задачі до параграфу 4.3.1.....	130
4.3.2. Еліптичні координати обертання.....	130
Задачі до параграфу 4.3.2.....	132
4.3.3. Параболічні координати обертання.....	133
Задачі до параграфу 4.3.3.....	133
4.3.4. Тороїдальні координати.....	134
Задача до параграфу 4.3.4.....	135
4.3.5. Розв'язки та відповіді до розділу 4.....	136
Використана література.....	146

## ПЕРЕДМОВА

---

---

Це видання є першою частиною серії з декількох навчально-методичних посібників для самостійної роботи студентів з класичної механіки. Автори цього посібника в різні роки читали лекції й вели практичні заняття з класичної механіки на фізичному факультеті.

Навчально-методичний посібник призначений для студентів фізичних спеціальностей, що вивчають теоретичну механіку, і містить задачі, розв'язання яких сприятимуть більш глибокому розумінню фізичних ідей класичної механіки, розвитку необхідних практичних навичок.

Класичний курс механіки (див., наприклад, «Механику» Л. Д. Ландау, Е. М. Ліфшица [12]), як правило, починається з викладання лагранжевого підходу, оскільки передбачається, що з підходом Ньютона студенти ознайомлені в курсі загальної фізики. Проте, автори вважали за потрібне для порівняння ньютонівського та лагранжевого підходів до механіки почати виклад матеріалу з формулювання основних принципів ньютонівської механіки та розв'язання простих задач, які стосуються одновимірного та двовимірного руху матеріальної точки (розд. 1). Оскільки в лагранжевому підході фігурують узагальнені координати, то в другому розділі наведено головні відомості з теорії криволінійних координат у двовимірному просторі, а в третьому вирішуються переважно одновимірні й двовимірні задачі. Цей розділ присвячений лагранжевому підходу до механіки. У четвертому розділі розглянуто криволінійні координати в тривимірному просторі. Розділ має довідковий характер (хоча й містить задачі з зазначеної теми), оскільки студенти ознайомлені із цим предметом у курсі аналітичної геометрії. Проте, ми вважали за потрібне залучення такого матеріалу до методичного посібника. Сподіваємося, що це видання буде корисним як для студентів фізичних спеціальностей, так і для викладачів, які ведуть практичні заняття з теоретичної механіки.

## НЬЮТОНІВСЬКА МЕХАНІКА

...Найвидатнішим був Ісаак Ньютон.

Вольтер, «Філософські твори»

### 1.1. Основні принципи ньютонівської механіки

Основні принципи (фактично, аксіоми) ньютонівської механіки були викладені Ньютоном у його трактаті «Математичні основи натуральної філософії» [18] в 1786 році. Ми наведемо кілька цитат із книги Ньютона для порівняння із сучасним тлумаченням цих принципів.

Визначення:

Кількість матерії є міра такої, що встановлюється пропорційно щільності і об'єму її (визначення *маси*)

Кількість руху є міра такого, що встановлюється пропорційно швидкості і масі (визначення *імпульсу*).

Прикладена сила є дія, зроблена над тілом, щоб змінити його стан спокою або рівномірного прямолінійного руху (визначення *сили*).

Вроджена сила матерії є притаманна їй здатність опору. Ця сила завжди пропорційна масі. Від інерції матерії відбувається, що будь-яке тіло лише насилу виводиться зі свого спокою або руху. Тому «вроджена сила» могла б бути досить зрозуміло названа «силою інерції» (визначення *сили інерції*)

Абсолютний, істинний, математичний час сам по собі і по своїй суті, без жодного відношення до будь-чого зовнішнього протікає рівномірно (визначення *часу*).

Абсолютний простір по суті, безвідносно до будь-чого зовнішнього залишається завжди однаковим і нерухомим (визначення *простору*).

**Закони:**

**Будь-яке тіло продовжує втримуватися у своєму стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки й оскільки воно не примушується прикладеними силами змінити цей стан.**

**Зміна кількості руху пропорційна прикладеній рушійній силі й відбувається за напрямком тієї прямої, вздовж якої ця сила діє.**

**Дії завжди є рівна й протилежна протидія.**

Ці закони та визначення, сформульовані без усяких формул, стали основою (разом з диференціальним обчисленням) теоретичної механіки з усім її математичним апаратом.

Сучасною мовою основні принципи механіки можуть бути сформульовані в такий спосіб.

**1. Простір і час.** Наш час однорозмірний, однорідний та ізотропний (тобто допускає заміну  $t \rightarrow -t$ ). Простір – тривимірний та евклідовий, тобто він однорідний, ізотропний, і в ньому визначена відстань між точками (довжина відрізка)  $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ .

**2. Принцип відносності.** Існують інерціальні системи відліку, які характеризуються такими властивостями: а) всі закони природи в усі моменти часу однакові у всіх інерціальних системах відліку; б) всі системи відліку, що рухаються відносно інерціальної рівномірно та прямолінійно є інерціальними. В інерціальній системі відліку тіло, надане самому собі, рухається рівномірно й прямолінійно або перебуває в стані спокою.

**3. Принцип детермінізму.** Початковий стан механічної системи (сукупність початкових координат і швидкостей всіх матеріальних точок системи в якийсь момент часу) однозначно визначає весь її рух.

З останнього, зокрема, виходить, що значення прискорень всіх точок може бути виражене через відомі значення координат і швидкостей. У теорії диференціальних рівнянь завдання граничних (у часі) умов для функцій (координат) і їхніх перших похідних (швидкостей) означає, що рівняння повинні бути другого порядку. Отже, рівняння динаміки сукупності матеріальних точок повинні мати вигляд  $\ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{f}_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$ . Це узгоджується з наведеним формулюванням рівняння Ньютона  $\dot{\vec{P}} = \vec{F}$ , у якому  $\vec{P} = m\vec{V}$  – імпульс,  $m$  – маса та  $\vec{V}$  – швидкість матеріальної точки. Одже, остаточне рівняння Ньютона для точки з номером  $i$  має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \vec{F}_i \left( \vec{r}_j, \frac{d\vec{r}_j}{dt}, t \right), \quad (1.1)$$

де  $\vec{r}_j$  – декартові координати всіх точок системи. В окремому випадку, коли швидкості  $d\vec{r}_j/dt$  не входять у праву частину рівняння (1.1) силу можна уявити у вигляді  $\vec{F}_i = -\partial U / \partial \vec{r}_i$ , де  $U(\vec{r}_j, t)$  – потенціальна енергія системи. У цьому випадку сила в правій частині – потенціальна (член у лівій частині (1.1) – інерціальна сила).

Знайомство з ньютонівською механікою почнемо із простого випадку одновимірного руху, коли одна матеріальна точка рухається прямолінійно.

Такий рух відбувається, якщо діюча сила має постійний напрямок і початкову швидкість паралельну цьому напрямку.

Надалі будемо вважати, що тіло рухається уздовж осі  $Ox$ , і система рівнянь зводиться до одного скалярного рівняння

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad (1.2)$$

де  $m$  – маса тіла, з початковими умовами

$$\dot{x}(t_0) = v_0, \quad x(t_0) = x_0.$$

Спочатку розглянемо, як залежність сили від окремих аргументів  $x$ ,  $\dot{x}$  або  $t$  впливає на динаміку системи.

Якщо сила є функція тільки однієї змінної, то диференціальне рівняння прямолінійного руху (1.2) інтегрується методом розділення змінних.

## 1.2. Рух під дією сили, що залежить тільки від часу

У цьому випадку рівняння (1.2) спрощується та приймає вигляд

$$m\ddot{x} = F(t) \quad (1.3)$$

Інтегруючи рівняння (1.3) і визначаючи довільну сталу за початкових умов  $\dot{x}(t_0) = v_0$ ,  $x(t_0) = x_0$ , знаходимо вираз для швидкості в будь-який момент часу  $t$

$$\dot{x}(t) = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t') dt'. \quad (1.4)$$

Після другого інтегрування отримаємо значення координати в момент  $t$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \left\{ \int_{t_0}^{t'} F(t'') dt'' \right\}. \quad (1.5)$$

### Задачі до параграфа 1.2

**1.2.1.** Дослідити рух частинки маси  $m$  в полі сили тяжіння за умови, що початкова швидкість має тільки вертикальну складову. Прискорення вільного падіння дорівнює  $g$ .



**1.2.2.** Тіло маси  $m$  рухається під дією залежної від часу сили  $F = \alpha(1-t)$ . Через який час тіло зупиниться, якщо його початкова швидкість у момент  $t_0 = 0$  дорівнює  $v_0$ , а сила збігається за напрямком зі швидкістю тіла? Який шлях пройде тіло до зупинки?

**1.2.3.** Матеріальна точка маси  $m$  здійснює прямолінійний рух під дією сили, що змінюється за законом  $F = F_0 \cos \omega t$ , де  $F_0$  та  $\omega$  – сталі. У початковий момент  $\dot{x}(0) = v_0$ ,  $x(0) = 0$ . Знайти закон руху точки. Яка буде середня швидкість частинки за великий час?

**1.2.4.** Матеріальна точка маси  $m$  прямолінійно рухається під дією сили, що змінюється за законом  $F = F_0 \cos \omega t$  та діє протягом часу  $0 < t < t_*$ . Визначити швидкість частинки після «вимикання» сили.

**1.2.5.** Частинка маси  $m$ , яка має заряд  $e$ , перебуває в однорідному електричному полі зі змінною напруженістю  $E = E_0 \sin kt$ . Визначити рух частинки, якщо  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ .

**1.2.6.** Частинка з масою  $m$  рухається уздовж осі  $Ox$  під дією сили  $F = F_0 \cos(\omega t + \delta)$ , що вмикається в момент часу  $t = 0$ , у який  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ . Як середня швидкість руху частинки залежить від початкової фази діючої сили  $\delta$ ?

**1.2.7.** Частинка з масою  $m$  рухається під дією сили  $F = F_0 \operatorname{sech}^2(\kappa t)$ . Визначити кінцеву швидкість частинки, якщо при  $t \rightarrow -\infty$  вона була непорушною в точці  $x = 0$ .

**1.2.8.** Розглянути попередню задачу й знайти залежність зсуву частинки від часу і її швидкість у всьому часовому інтервалі  $-\infty < t < +\infty$ . Визначити залежність швидкості частинки від її координати  $\dot{x} = \dot{x}(x)$  та зобразити її на площині  $(\dot{x}, x)$ .

**1.2.9.** Знайти залежність від часу координати та швидкості частинки, що рухається під дією сили

$$F = \begin{cases} 0, & t < 0, t > T; \\ F_0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Визначити залежність швидкості частинки від її координати  $\dot{x} = \dot{x}(x)$  та зобразити її на площині  $(\dot{x}, x)$ .

**1.2.10.** Знайти залежність від часу координати й швидкості частинки, що рухається під дією сили  $F = -F_0 \operatorname{sh}(\kappa t) / \operatorname{ch}^3(\kappa t)$ . Обчислити максимальний зсув частинки та побудувати залежність її швидкості від координати, якщо сила виводить частинку зі стану спокою в точці  $x = 0$ .

### 1.3. Рух під дією сили, що залежить тільки від положення частинки

У цьому разі дослідження рівняння (1.2) також спрощується. Оскільки час не входить до рівняння руху, то система консервативна і її енергія зберігається. Це дає можливість розв'язати задачу у квадратурах і провести її якісний аналіз. Рівняння (1.2) приймає вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = F(x). \quad (1.6)$$

Помножимо обидві частини рівняння на  $v dt = dx$ . Отримаємо

$$m v dv - F(x) dx = 0.$$

Інтегрування цього виразу приводить нас до формули

$$\frac{m v^2}{2} - \int F(x) dx = E,$$

де  $E$  – це константа інтегрування. Оскільки в цьому випадку сила є потенціальною та дорівнює  $F = -\partial U / \partial x$ , де  $U(x)$  – потенціальна енергія, то величина  $E$  являє собою повну енергію, тому

$$\frac{m v^2}{2} + U(x) = E. \quad (1.7)$$

Нагадаємо, що відповідно до загального визначення потенціальної сили  $\vec{F} = -\text{grad}U$ . Для цього необхідно та достатньо, щоб  $\text{rot}\vec{F} = 0$ . У разі прямолінійного руху матеріальної точки ця умова виконується автоматично, тому сила  $F$  є потенціальною. Отже:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}, \quad U(x) = -\int F(x) dx.$$

При першому інтегруванні отримано закон збереження енергії (перший інтеграл руху) (1.7). Розв'яжемо отримане рівняння (1.7) відносно швидкості  $v$ . Маємо рівняння з розділювальними змінними

$$v = \pm \sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}} \quad (1.8)$$

або

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2[E - U(x)]}} dx,$$

інтегруючи яке знаходимо у квадратурах розв'язання у вигляді залежності  $t = t(x)$

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + C. \quad (1.9)$$

де  $E$  та  $C$  – довільні сталі, які визначаються початковими умовами  $\dot{x}(t_0) = v_0$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

Вираз (1.9) дає повне розв'язання задачі про одновимірний рух частинки в консервативній системі. Однак обчислення інтеграла, що входить в (1.9) може бути математичною складністю. Тому для якісного аналізу динаміки розглянутих систем можна повернутися до рівняння (1.8) і досліджувати його як залежність швидкості частинки  $v(t)$  від її координати  $x(t)$  на площині  $(v, x)$ . Звичайно в механіці (і статистичній фізиці) у випадку системи з  $N$  ступенями свободи  $2N$ -вимірний простір  $N$  координат та  $N$  імпульсів називають **фазовим простором**. У нашому випадку одновимірного руху ми маємо **фазову площину** (рис. 1.1).

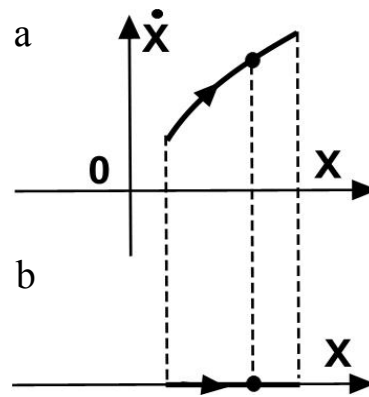


Рис. 1.1. Одновимірний рух матеріальної точки в конфігураційному просторі (лінія  $b$ ) і відповідний рух зображувальної точки у фазовому просторі (площина  $a$ )

Руху **матеріальної** точки в координатному (**конфігураційному**) просторі (пряма лінія  $b$  на рис. 1.1) відповідає рух **зображувальної** точки у фазовому просторі (площина  $(\dot{x}, x)$   $a$  на рис. 1.1). Кожному припустимому значенню енергії, уздовж якого рухається **зображуюча** точка, відповідає своя лінія на фазовій площині. Оскільки  $v = dx/dt$ , то у верхній напівплощині зображуючі точки рухаються праворуч, а в нижній – ліворуч. Сукупність всіх ліній (**фазових траєкторій**) із вказівкою напрямків руху зображуючих точок уздовж них утворюють **фазовий портрет** системи, знання якого дозволяє якісно оцінювати її динаміку.

### Задачі до параграфу 1.3

**1.3.1.** Тіло падає на Землю з висоти  $h$  без початкової швидкості. Опором повітря знехтувати та вважати, що сила тяжіння Землі обернено пропорційна квадрату відстані тіла до центра Землі. Знайти час  $T$ , за який тіло досягне поверхні Землі. Якої швидкості воно досягне за цей час?

Радіус Землі дорівнює  $R$ , прискорення сили тяжіння у поверхні Землі дорівнює  $g$ . Розглянути випадок  $h \ll R$  та порівняти його з результатом задачі 1.2.1.

**1.3.2.** Частинка маси  $m$  починає рухатися без початкової швидкості з положення  $x = \beta$  прямолінійно (уздовж осі  $x$ ) під дією сили тяжіння до початку координат, що змінюється за законом  $F = -\alpha/x^2$ . Знайти момент часу, коли точка опиниться в положенні  $x_1 = \beta/2$ . Визначити швидкість точки в цьому положенні.

**1.3.3.** Точка маси  $m$  починає рухатися зі стану спокою в положенні  $x_0 = a$  прямолінійно під дією сили відштовхування  $F_1 = C_1mx$  та сили притягання  $F_2 = -C_2mx^3$ . При якому співвідношенні констант  $a, C_1, C_2$  точка досягне початку координат і зупиниться? Що відбудеться, якщо при тих же початкових умовах змінити знаки сил:  $F_1 = -C_1mx$  та  $F_2 = C_2mx^3$ ?

**1.3.4.** Розглянути динаміку тіла масою  $m$ , кинутого в шахту, що проходить наскрізь земної кулі через її центр (така задача обговорювалася в листуванні Гука й Ньютона). Обертанням Землі та тертям зневажити й припустити, що Земля має однорідну щільність. Знайти час  $T$  повернення тіла у вихідну точку.

**1.3.5.** Частинка «скочується» з потенціального горба  $U = -\alpha x^2$ . У початковий момент  $t = 0$  вона була нерухомою, і її координата дорівнювала  $x_0 = a$ . Знайти час  $T_{ab}$ , за який

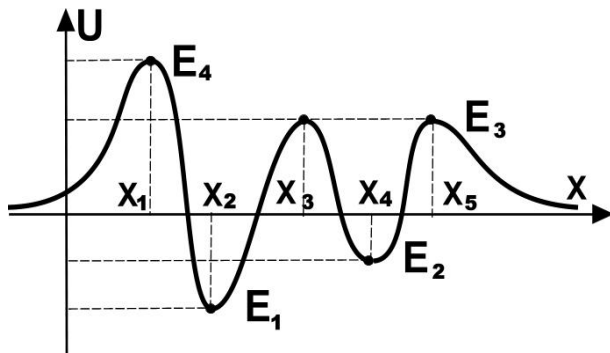


Рис. 1.2. Приклад потенціальної енергії, залежності якої від координати має декілька особливих точок

частинка досягне точки  $x = b$ , та залежність величини  $T_{ab}$  від початкової енергії  $T_{ab} = T_{ab}(E_0)$ . Знайти аналогічну залежність для потенціалу  $U = -\beta x^4$ .

**1.3.6.** Побудувати фазовий портрет матеріальної точки, що рухається в потенціалі, зображеному на рис. 1.2.

**1.3.7.** Матеріальна частинка, що рухається із точки  $x_0 = -a$

в позитивному напрямку, відбивається від потенціального рельєфу  $U = \alpha x^3$ . Намалювати фазовий портрет системи та знайти залежність часу повернення точки у вихідне положення в залежності від її енергії.

### 1.4. Рух під дією сили, що залежить тільки від швидкості

В цьому разі рівняння (1.2) приймає вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \left( \frac{dx}{dt} \right). \quad (1.10)$$

Це рівняння допускає зниження порядку, якщо прийняти  $\dot{x} = v$  за шукану функцію. Маємо замість (1.10)

$$m \frac{dv}{dt} = F(v). \quad (1.11)$$

Проінтегрувавши рівняння (1.11), знайдемо швидкість частинки в неявному вигляді

$$t = \int \frac{m dv}{F(v)} + t_0 \quad (1.12)$$

де  $t_0$  – довільна стала. Припустимо, що із цього рівняння ми зможемо знайти  $v$ , як функцію різниці  $t - t_0$ , тобто

$$\dot{x} = \varphi(t - t_0)$$

або

$$dx = \varphi(t - t_0) dt.$$

Тоді, інтегруючи цей вираз знайдемо закон руху  $x = x(t)$

$$x = \int_{t_0}^t \varphi(t) dt + x_0, \quad (1.13)$$

де  $x_0 = x(t_0)$ .

У разі, коли з розв'язку (1.12) не вдається знайти швидкість  $v$  як явну функцію часу, треба помножити ліву частину рівняння (1.11) на  $v dt$ , а праву – на  $dx$ :

$$m v dv = F(v) dx.$$

Після розділення змінних отримаємо

$$dx = \frac{m v dv}{F(v)}.$$

Звідси

$$x(v) = \int \frac{mvdv}{F(v)} + C. \quad (1.14)$$

Якщо в результаті інтегрування можна знайти швидкість  $V$ , як явну функцію координати  $x$  маємо

$$\dot{x} = \psi(x - C)$$

або

$$dt = \frac{dx}{\psi(x - C)}.$$

Після другого інтегрування знаходимо

$$t = \int \frac{dx}{\psi(x - C)} + D. \quad (1.15)$$

Рівняння (1.15) в неявній формі визначає  $x$ , як функцію часу та довільних сталих  $C$  та  $D$ . Нарешті, якщо рівняння (1.12) та (1.14) не розв'язуються в явному вигляді відносно  $V$ , то їх можна розглядати як параметрично заданий закон руху

$$\begin{cases} t(v) = \int \frac{m dv}{F(v)} + t_0; \\ x(v) = \int \frac{mvdv}{F(v)} + C. \end{cases} \quad (1.16)$$

Вибір способу розв'язання (1.12)–(1.16) залежить від того, які співвідношення нас цікавлять.

### Задачі до параграфа 1.4

**1.4.1.** Тіло маси  $m$  підкинуте з поверхні Землі вертикально вгору з початковою швидкістю  $v_0$ . Сила опору середовища пропорційна квадрату швидкості  $\vec{R} = -mkv\vec{v}$ . Поле тяжіння Землі вважати однорідним. Знайти, з якою швидкістю тіло досягне поверхні Землі. (Звичайно в механіці вважається, що сила тертя пропорційна першому ступеню швидкості, однак у балістиці встановлено, що макроскопічні тіла, які рухаються в повітрі зі швидкостями  $0.1 < v < 300$  м/с зазнають опору  $F = \alpha \rho S v^2$ , де  $\rho$  – густина повітря,  $S$  – площа перетину тіла та  $\alpha$  – множник порядку одиниці).

**1.4.2.** На яку висоту  $h$  й за який час  $T$  підніметься тіло вагою  $P$ , кинуте вертикально вгору зі швидкістю  $v_0$ , якщо опір повітря може бути описаний формулою  $R = \kappa^2 P v^2$ , де  $v$  – швидкість тіла.

**1.4.3.** Тіло падає в повітрі без початкової швидкості. Опір повітря  $R = \kappa^2 P v^2$ , де  $v$  – величина швидкості,  $P$  – вага тіла. Яка буде швидкість тіла в довільний момент часу  $t$  після початку руху? Яке граничне значення швидкості?

**1.4.4.** Знайти закон руху частинки маси  $m$ , яка падає без початкової швидкості на Землю. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості. Коефіцієнт пропорційності дорівнює  $\eta$ .

**1.4.5.** Тіло маси  $m$  падає вертикально (зміна прискорення сили тяжіння з висотою не враховується) без початкової швидкості в середовищі, сила опору якого  $F(v) = -\alpha v - \beta v^2$ , де  $\alpha, \beta$  – додатні сталі. Знайти залежність швидкості від часу та граничне значення швидкості.

**1.4.6.** Підводний човен, що не мав ходу, діставши невелику негативну плавучість  $P$ , поринає на глибину, рухаючись поступально. Опір води при невеликій негативній плавучості можна прийняти пропорційним першому ступеню швидкості занурення та рівним  $kSv$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності,  $S$  – площа горизонтальної поверхні човна,  $v$  – величина швидкості занурення. Маса човна дорівнює  $M$ . Знайти залежність швидкості занурення від часу та закон руху човна, якщо в початковий момент часу  $v(0) = 0$ .

**1.4.7.** Тіло падає вертикально вниз без початкової вертикальної швидкості. Сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості. Знайти залежність між вертикальною швидкістю в цей момент, пройденим шляхом і максимальною швидкістю падіння.

## 1.5. Рух під дією більш складних сил

Вище була розглянута динаміка систем, у яких зовнішня сила, що діє на точку, залежала окремо від координати, швидкості або часу. У звичайній ситуації одночасно діють різні сили, як потенціальні, так і сили тертя. При цьому задача інтегрування рівнянь руху стає більш складною.

Вона спрощується у випадку, коли потенціальна енергія містить тільки лінійні й квадратичні по координаті тіла доданки, а сила тертя лінійно залежить від швидкості. Це, як правило, виконується в першому наближенні. Для таких систем рівняння Ньютона стає лінійним по зсувах і їхніх часових похідних і має вигляд

$$m \ddot{x} + \eta(t) \dot{x} + k(t) x = f(t). \quad (1.17)$$

Ефективна маса  $m$  також може залежати від часу, але ця залежність може бути перенесена на часові залежності інших коефіцієнтів. Рівняння (1.17) описує такі важливі фізичні задачі, як лінійний прямий та параметричний резонанси, коливання, що згасають [12]. Зазвичай сила тертя не залежить від часу. В цьому випадку заміна  $x = u \exp(-\lambda t)$ , де  $\lambda = \eta/2m$ , призводить (1.17) до вигляду

$$\ddot{u} + [\kappa(t) + \lambda^2]u = \frac{f(t)}{m} \exp(\lambda t) = P(t), \quad (1.18)$$

де  $\kappa(t) = k(t)/m$ . Загальний розв'язок рівняння (1.18) має вигляд [6]

$$u = \varphi_1 \int \frac{\varphi_2 P}{W} dt - \varphi_2 \int \frac{\varphi_1 P}{W} dt + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2, \quad (1.19)$$

де вронськіан  $W(t) = \varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \varphi_2 \dot{\varphi}_1$ , а  $\varphi_i(t)$  – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння

$$\ddot{\varphi} + [\kappa(t) + \lambda^2]\varphi = 0, \quad (1.20)$$

яке допускає дослідження різними методами математичної фізики.

У випадку рівняння Ньютона загального вигляду (1.1) при врахуванні нелінійності та складної часової залежності дослідження вимагає використання різних наближених або якісних методів (метод різних часових масштабів, асимптотичні методи, метод Ван-дер-Поля, якісні методи дослідження динамічних систем тощо). Деякі приклади наведені нижче у вигляді задач до параграфу 1.5.

## Задачі до параграфу 1.5

**1.5.1.** На висоті  $H$  над Землею матеріальній точці маси  $m$  надається початкова швидкість  $v_0$ , спрямована вертикально вниз. Знайти величину швидкості точки на висоті  $x$ , якщо на неї діє сила опору  $F = -\beta v^2$ , а прискорення сили ваги змінюється з висотою за законом  $-gmR^2/(R+x)^2$ , де  $R$  – радіус Землі.

**1.5.2.** Точка маси  $m$  рухається уздовж прямої  $Ox$  у середовищі з опором, пропорційним квадрату швидкості  $F = -\beta v^2$ . Знайти закон руху точки (у квадратурах), якщо на неї, крім того, діє сила  $\Phi = \Phi(x)$  та у початковий момент часу  $\dot{x}_0(t_0) = v_0 > 0$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

**1.5.3.** Розглянути попередню задачу для коливань гармонічного осцилятора із  $\Phi(x) = -m\omega_0^2 x$  із власною частотою  $\omega_0$  та з початковими умовами



$x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$ . Знайти залежність амплітуди коливання від часу при малій величині загасання.

**1.5.4.** Матеріальна точка маси  $m$  відштовхується від центра силою, пропорційною відстані (коефіцієнт пропорційності  $mk_2$ ). Опір середовища пропорційний швидкості руху (коефіцієнт пропорційності  $2mk_1$ ). В початковий момент точка перебувала на відстані  $a$  від центра, а її швидкість у цей момент дорівнювала нулю. Знайти закон руху точки.

**1.5.5.** При русі тіла в неоднорідному середовищі сила опору змінюється за законом  $F = -\alpha m v^2 / (\beta + x)$ , де  $v$  – швидкість тіла, а  $x$  – пройдений шлях. Визначити пройдений шлях як функцію часу, якщо початкові швидкість і координата дорівнюють  $v(0) = v_0, x(0) = 0$ .

**1.5.6.** На гармонічний осцилятор з масою  $m$  та власною частотою  $\omega_0$  діє періодична зовнішня сила  $F(t) = m f \sin \omega t$ . Знайти залежність амплітуди коливання від частоти  $\omega$ .

**1.5.7.** На гармонічний осцилятор з масою  $m$  та власною частотою  $\omega_0$  діє періодична резонансна зовнішня сила  $F(t) = m f \sin \omega_0 t$ . Знайти залежність амплітуди коливання від часу.

**1.5.8.** Знайти нелінійний зсув частоти ангармонічного осцилятора з енергією  $U = m\omega_0^2 x^2 - m\alpha x^4 / 4$  при малих амплітудах коливань.

**1.5.9.** Знайти наближені стаціонарні коливання осцилятора Ван-дер-Поля з нелінійним тертям, описувані рівнянням  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \eta(b^2 - x^2)\dot{x}$ .

**1.5.10.** Знайти наближені малоамплітудні стаціонарні коливання в умовах параметричного резонансу, описуваного рівнянням  $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos \alpha t)x = 0$ .

## 1.6. Динаміка систем із двома ступенями свободи

Дотепер ми розглядали одновимірний рух матеріальної точки як приклад системи з одним ступенем свободи. Перейдемо до аналізу ньютонівської динаміки систем із двома ступенями свободи. Простим прикладом таких систем може бути одновимірний рух двох матеріальних точок. При цьому маси частинок можуть бути різними й зовнішні потенціали для кожної частинки також можуть різнитися (див. рис. 1.3). Інша можливість пов'язана з одновимірним рухом двох взаємодію-

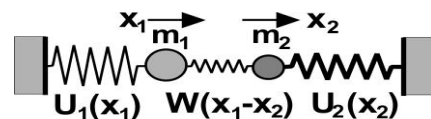


Рис. 1.3. Одновимірний рух двох зв'язаних осциляторів

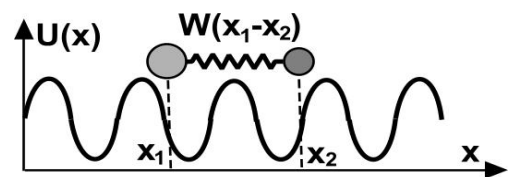


Рис. 1.4. Одновимірний рух двох зв'язаних частинок (димера) у зовнішньому полі

чих частинок у загальному потенціалі. Прикладом може бути рух «димера» (двохатомної молекули) на борознистій поверхні кристала (рис. 1.4).

У наведених прикладах рівняння Ньютона мають вигляд

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{dU_i(x_i)}{dx_i} - \frac{\partial W(x_i - x_j)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2; j = 2, 1 \quad (1.21)$$

або

$$m_i \ddot{x}_i = -\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=x_i} - \frac{\partial W(x_i - x_j)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2; j = 2, 1. \quad (1.22)$$

Якщо маси частинок збігаються, то розглянуту динаміку можна уявити як рух однієї точки на двовимірній площині, що описується рівнянням

$$m \ddot{\vec{r}} = -\frac{dU(\vec{r})}{d\vec{r}}, \quad (1.23)$$

де в декартових координатах  $\vec{r} = (x_1, x_2)$ .

Дослідження динаміки системи із двома ступенями свободи істотно складніше, ніж у випадку одного ступеня свободи, оскільки в загальному випадку рівняння (1.21) – (1.23) мають (якщо немає тертя) лише один інтеграл руху – повну енергію

$$E = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + U(x_1, x_2). \quad (1.24)$$

Якщо немає другого інтеграла руху, то це може призвести до складного (і навіть хаотичного) руху. Ситуація спрощується, коли є додатковий інтеграл руху.

У загальному ж випадку корисним буває дослідження потенціальної енергії, як функції двох координат  $U(x_1, x_2)$ , та дослідження особливих точок цієї поверхні потенціальної енергії (ППЕ). Побудова ліній постійного рівня потенціальних енергій та знаходження особливих точок ППЕ, в яких частинка може перебувати в стані спокою за умов  $\partial U / \partial x_1 = \partial U / \partial x_2 = 0$ , дає уявлення про вид ППЕ та можливий характер динаміки системи.

Для прикладу розглянемо одновимірну динаміку димера (двохатомної молекули) в одновимірному двоямному потенціалі. У цьому випадку в (1.21) повна потенціальна енергія дорівнює

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= \frac{k(x_1^2 - 1)^2}{2} + \frac{k(x_2^2 - 1)^2}{2} + \frac{K(x_1 - x_2)^2}{2} = \\ &= U(x_1) + U(x_2) + W(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (1.25)$$

де двоямний потенціал  $U(x)$ , в якому рухаються дві частинки зображених на рис. 1.5.

Повний двовимірний потенціал  $W(x_1, x_2)$ , в якому відбувається двовимірний рух однієї ефективної частинки, має більш складний вигляд. Перетини цієї ППЕ при малих значеннях взаємодії всередині димера  $K < 2k/3$  схематично зображені на рис. 1.6(a). Вони дають уявлення про вигляд цієї поверхні.

На цьому рисунку точки  $A, A'$  відповідають мінімуму потенціальної енергії при розташуванні обох атомів димера в одній і тій же потенціальній ямі:  $x_1 = x_2 = 1$  або  $x_1 = x_2 = -1$ . Точки  $B$  відповідають умовним мінімумам енергії, коли атоми димера перебувають біля різних мінімумів. В точці  $C$  енергія досягає максимуму, а точки  $S$  є перевальними. Щоб уникнути непорозуміння підкреслимо, що на рис. 1.6 зображений двовимірний *конфігураційний* простір, і *перевальні* точки не слід плутати із *сідловими* точками на фазових портретах одновимірних систем, яким відповідали максимуми енергії.

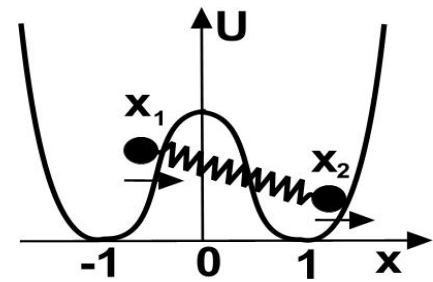


Рис. 1.5. Рух димера у двоямному потенціалі

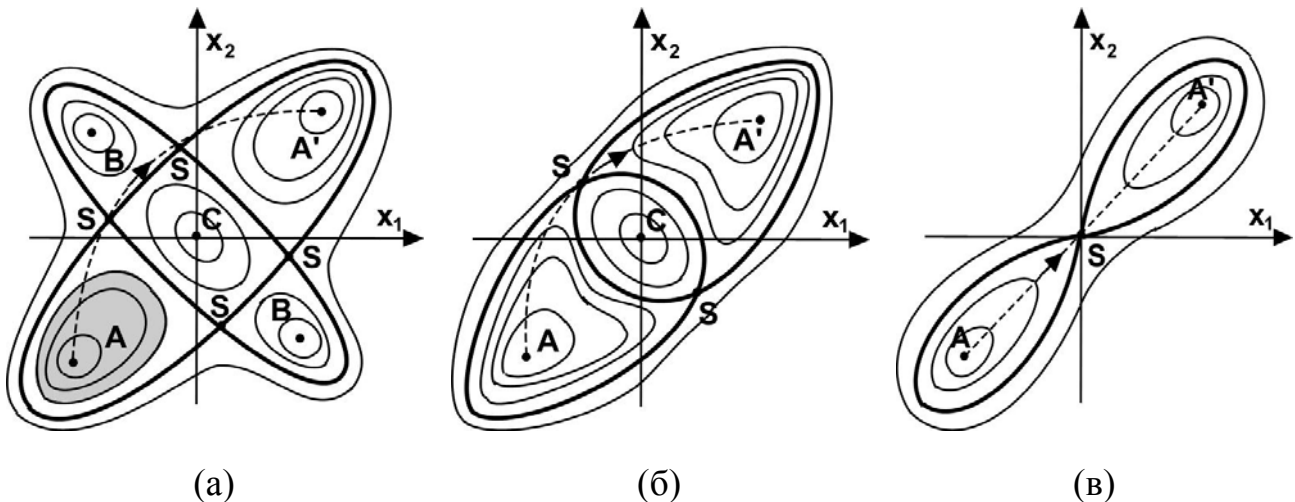


Рис. 1.6. Перетини ППЕ площинами постійного значення енергії системи – лінії постійної енергії на ППЕ при різних співвідношеннях параметрів системи: (а)  $K < 2k/3$ ; (б)  $2k/3 < K < k$ ; (в)  $K > k$ . (див. задачу 1.11.1)

Рух точки на площині  $(x_1, x_2)$ , який відповідає зміні координат двох частинок димера, може бути дуже складним, але аналіз ППЕ дозволяє зробити деякі якісні висновки щодо цієї динаміки. Наприклад, фіксація енергії  $E = E_0$  визначає припустиму для руху частину простору. Для прикладу на рис. 1.6(a) заштрихована область, яка містить всі траєкторії руху

частинок з енергіями  $E < E_0$ . Ця область обмежена лінією  $W(x_1, x_2) = E_0$ . На лінії кінетична енергія дорівнює нулю. Це відповідає точкам зупинки частинок. Знання екстремальних точок дозволяє знайти критичні значення енергії, при яких можлива якісна зміна стану системи – перехід однієї із частинок димера в іншу потенціальну яму. З рис. 1.6(а) видно, що перехід димера з одного мінімуму в інший можливий при збудженні його до енергії перевальної точки  $S$ . Процес переходу системи з одного стану в інший відбувається по шляху, зображеному пунктиром, та супроводжується розтягуванням димера. Із зростанням параметра  $K$  характер ППЕ змінюється і перевальні точки попарно зливаються (рис. 1.6(б)). Але як і раніше, для переходу в інший основний стан димер «розтягується» під час цього процесу.

Дослідження системи спрощується, якщо вона має додатковий до енергії інтеграл руху. При цьому динамічні рівняння інтегруються у квадратурах. Наприклад, якщо в рівнянні (1.23) потенціальна енергія залежить тільки від модуля відстані частинки до центра поля  $U(\vec{r}) = U(|\vec{r}|)$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , то помноживши рівняння

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{x_i}{r}, \quad i = 1, 2 \quad (1.26)$$

на  $x_j$ ,  $j = 2, 1$  та взявши їх різницю, отримаємо

$$\frac{d}{dt}(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = 0.$$

Це означає, що інтегралом руху є величина кутового моменту системи

$$M = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1). \quad (1.27)$$

В цьому прикладі дослідження руху найбільш просто та наочно виглядає в циліндричних координатах  $(r, \varphi)$ , які пов'язані з декартовими координатами  $(x, y)$  через співвідношення

$$\begin{cases} x_1 = x = r \cos \varphi; \\ x_2 = y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.28)$$

Обернені формули

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.29)$$

(Докладно властивості циліндричних координат і більш загальних криволінійних координат обговорюються в розд. 2).

У циліндричних координатах два рівняння (1.26) з «переплутаними» координатами зводяться до одного рівняння для координати  $r$

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial U_{ef}(r)}{\partial r}, \quad (1.30)$$

в якому ефективна потенціальна енергія та повна енергія дорівнюють

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (1.31)$$

та

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{ef}(r). \quad (1.32)$$

Величина  $M = mr^2\dot{\varphi}$  є кутовим моментом  $\vec{M} = m[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]$ , спрямованим перпендикулярно до площини  $(x, y)$  руху частинки. Рівняння (1.30) з урахуванням інтегралів руху дозволяють вирішити задачу та знайти часові залежності координат [12]. Формула

$$t(r) - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - M^2 / 2mr^2}} \quad (1.33)$$

у неявній формі визначає розв'язок  $r = r(t)$  – радіальну частину закону руху, а отже, і залежність  $\varphi(t) = \int dt / r^2(t)$  – кутову частину закону руху. Траєкторія руху в інтегральному вигляді описується формулою

$$\varphi(r) = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}}. \quad (1.34)$$

Якісно динаміка легко досліджується в межах співвідношень (1.31), (1.32) на «фазовій площині»  $(r, \dot{r})$  як залежність  $\dot{r} = f(r)$

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{\sqrt{E - U_{ef}(r)}}. \quad (1.35)$$

Вона зображена на рис. 1.7б для повільно убуваючого з відстанню потенціалу притягання, що задає ефективну потенціальну енергію  $U_{ef}(r)$ , наведену на рис. 1.7а. На рис. 1.7в траєкторія руху зображена в конфігураційному просторі  $(x, y)$ .

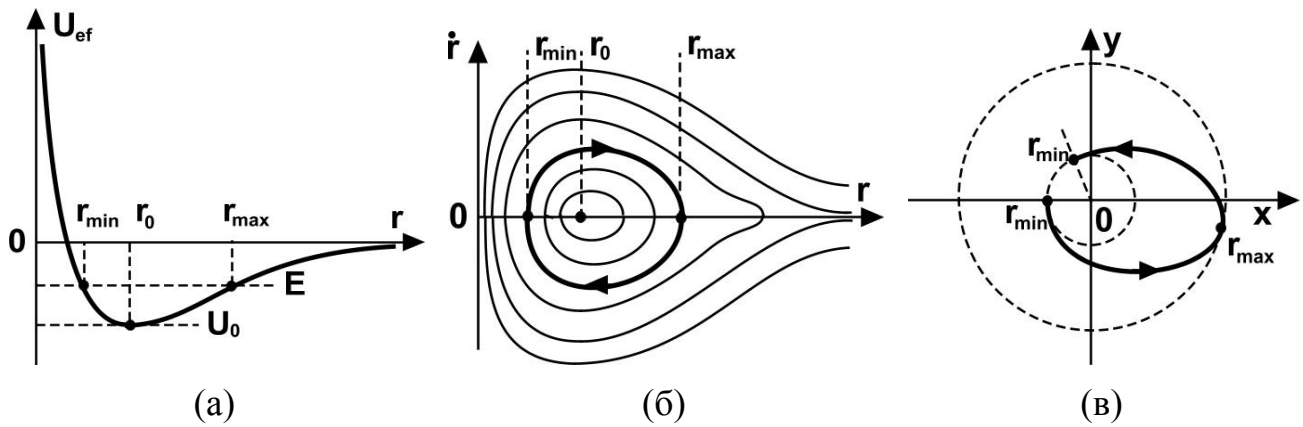


Рис. 1. 7. (а) – профіль ефективної потенціальної енергії,  
 (б) – фазовий портрет системи в змінних  $(r, \dot{r})$ ,  
 (в) – вид траєкторії руху в координатному просторі

Період коливання радіуса орбіти  $T_r$  (та відповідна частота  $\omega_r$ ) визначаються формулою

$$T_r = \sqrt{2m} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} = \frac{2\pi}{\omega_r}, \quad (1.36)$$

в якій межі інтегрування  $(r_{\min}, r_{\max})$  знаходяться як корені рівняння

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = 0. \quad (1.37)$$

Рухаючись у такий спосіб матеріальна точка за період коливання в загальному випадку довільного потенціалу  $U(r)$  не вертається у вихідну позицію з тим самим значенням  $r_{\min}$  та значенням кутової змінної  $\varphi$ . Так, рух є квазіперіодичним.

Важливим є окремий випадок кеплерівського потенціалу  $U(r) = -\alpha/r$ . Розв'язання рівнянь Ньютона з таким потенціалом показало справедливість експериментальних законів Кеплера та підтвердило справедливість самих цих рівнянь. У кеплерівському потенціалі всі фінітні траєкторії стають замкненими, і час радіального коливання  $T_r$  збігається з періодом азимутального руху – часом  $T_\varphi$  обертання частинки на кут  $2\pi$ . З формули (1.34) можна знайти рівняння траєкторії руху в явному вигляді. Для від'ємної повної енергії вона являє собою еліпс, рівняння якого у декартових координатах має вигляд

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.38)$$

Тут  $a = \alpha/2|E|$  – велика полувісь еліпса,  $b = M/\sqrt{2m|E|}$  – мала полувісь еліпса,  $e = \sqrt{1 - 2|E|M^2/m\alpha^2} = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  – ексцентриситет.

В полярних координатах рівняння еліпса

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}, \quad (1.39)$$

де  $r_0 = M^2/m\alpha = b^2/a$  – параметр. При заданому значенні кутового моменту  $M$  та мінімальній енергії  $|E_{\min}| = m\alpha^2/2M^2$  ексцентриситет  $e = 0$ , рух відбувається вздовж кола радіусу  $r = r_0$ .

У випадку кеплерівського потенціалу  $U(r) = -\alpha/r$  крім повної енергії (1.32) та кутового моменту (1.27)  $\vec{M} = m[\vec{r}, \vec{v}]$  існує також специфічний векторний інтеграл руху (вектор Рунге – Ленца)

$$\vec{A} = [\vec{v}, \vec{M}] - \frac{\alpha \vec{r}}{r} \quad (1.40)$$

спрямований уздовж великої напіввісі еліпсу в напрямку найкоротшої відстані від центра поля (див. рис. 1.23 до задачі 1.11.5).

## Задачі до параграфу 1.6

**1.6.1.** За допомогою програми Maple (або Mathematica) побудуйте ізоенергетичні перетини поверхні потенціальної енергії системи димера у двохявному потенціалі, описуваному за допомогою формули (1.25) при різних співвідношеннях параметрів  $K/k$ .

**1.6.2.** Для задачі про динаміку димера у двохявному потенціалі з потенціальною енергією (1.25) обчислити залежність мінімальної енергії, необхідної для переходу зі стану  $x_1 = x_2 = 1$  в стан  $x_1 = x_2 = -1$  від параметра енергії зв'язку димера  $K$ .

**1.6.3.** Розглянути динаміку димера з гармонічною взаємодією між частинками в періодичному полі потенціалу підкладки вигляду

$$U(x_1, x_2) = \frac{k}{2}(x_1 - x_2 - a)^2 + U_0 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x_1}{a} \right) + U_0 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x_2}{a} \right).$$

**1.6.4.** Зобразити плоский періодичний рух частинки в кеплерівському потенціалі на площині циліндричних і параболічних координат.

**1.6.5.** Обчислити середню за часом відстань до центра поля частинки в кеплерівському потенціалі.

**1.6.6.** Показати, що при русі зарядженої частинки в точковому електростатичному потенціалі за наявності додаткового однорідного електричного поля  $\vec{E}$  зберігається скалярна величина  $C = \vec{A}\vec{F} + [\vec{F}, \vec{r}]^2 / 2$ , де  $\vec{A} = [\vec{v}, \vec{M}] - \alpha \vec{r} / r$ ,  $\vec{F} = e\vec{E}$ .

**1.6.7.** Приблизно описати плоский рух зарядженої частинки в точковому електростатичному потенціалі за наявності слабкого однорідного магнітного поля в площині.

## 1.7. Динаміка систем зі зв'язками

У попередніх розділах ми переконалися, що знання інтегралів руху істотно спрощує задачі механіки, зменшуючи число динамічних змінних і рівнянь, які необхідно розв'язувати. Розглянуті інтеграли руху (енергія, кутовий момент, вектор Рунге – Ленца тощо) є прикладами кінематичних обмежень або неголономних зв'язків, які містять як координати частинок, так і їхні швидкості. Наприклад, у системі з циліндричною симетрією на координати та швидкості матеріальної точки накладається обмеження  $x(t)v_y(t) - y(t)v_x(t) = \text{const} = M_z$  – збереження кутового моменту.

В іншому важливому випадку на систему накладаються геометричні обмеження або голономні зв'язки, які залежать тільки від координат механічної системи та можуть бути подані у вигляді

$$f(\vec{r}_i, t) = 0. \quad (1.41)$$

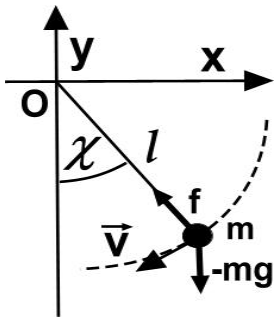


Рис. 1.8. Плоский математичний маятник

Якщо час не входить у вираз (1.41), то зв'язок називається стаціонарним голономним зв'язком. Приклад такого зв'язку дає задача про плоский рух математичного маятника. Математичний маятник являє собою матеріальну точку маси  $m$ , почеплену в полі сили тяжіння на абсолютно нерозтяжній невагомій нитці довжиною  $l$  (рис. 1.8).

У цьому прикладі на дві декартові координати частинки накладена умова зв'язку  $x^2 + y^2 = l^2$ . Задача, звичайно, може бути вирішена в ньютонівському формалізмі. Але для цього необхідно врахувати силу реакції  $\vec{f}$  нитки почепу. При цьому ньютонівські рівняння будуть мати вигляд

$$m\ddot{x} = f_x = -f \sin \chi = -\frac{f x}{l}; \quad (1.42)$$



$$m \ddot{y} = -mg + f \cos \chi = -mg - \frac{f y}{l}. \quad (1.43)$$

Невідому силу натягу нитки необхідно виключити, уявивши систему (1.42), (1.43) у вигляді

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} + gx = 0$$

або в циліндричних координатах (у цьому прикладі  $\chi = \arctg(x/y)$ )

$$\ddot{\chi} + \frac{g}{l} \sin \chi = 0. \quad (1.44)$$

Одже, з урахуванням зв'язку система із двома ступенями свободи звелася до ефективної системи з одним ступенем свободи в циліндричній системі координат, яка враховує симетрію задачі. Зазначимо, що отримане рівняння вийшло нелінійним: це так звана геометрична нелінійність, пов'язана з геометричними обмеженнями.

Рівняння (1.44) може бути отримане за допомогою ньютонівського підходу й без введення сил реакції. Для цього треба спроектувати рівняння Ньютона на напрямок руху матеріальної точки, перпендикулярний силам реакції. Покажемо це в загальному випадку. Розглянемо плоский двовимірний рух у полі сили тяжіння матеріальної точки, яка може без тертя ковзати по дроту, що має форму  $y = F(x)$  (рис. 1.9).

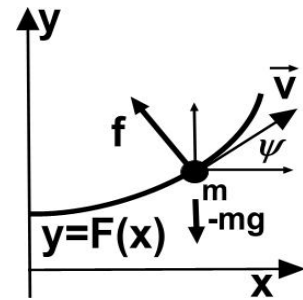


Рис. 1.9. Плоский рух частинки вздовж напрямної у полі сили тяжіння

Якщо ввести координату  $s$  уздовж лінії зв'язку  $y = F(x)$ , то рівняння Ньютона для неї має вигляд

$$m \ddot{s} = -mg \sin \psi(s).$$

Звідси маємо, що

$$m(\ddot{x} \cos \psi + \ddot{y} \sin \psi) + mg \sin \psi = 0. \quad (1.45)$$

Оскільки  $\tan \psi = dF/dx = F'$  та  $\ddot{y} = F'' \dot{x}^2 + F' \ddot{x}$ , то остаточне рівняння має вигляд

$$\left[1 + (F')^2\right] \ddot{x} + F' F'' \dot{x}^2 + g F' = 0 \quad (1.46)$$

### Задачі до параграфа 1.7

**1.7.1.** Знайти силу натягу нитки при коливанні математичного маятника.

**1.7.2.** Вивести рівняння руху частинки в поле тяжіння, якщо вона може без тертя ковзати по дроту, який має форму параболи  $y = x^2/2l$ .

**1.7.3.** Знайти сили реакції зв'язку, якщо частинка рухається уздовж плоскої кривої загального вигляду  $y = F(x)$ .

**1.7.4.** Запишіть рівняння коливання математичного маятника (1.44) у декартових координатах.

### 1.8. Розв'язки та відповіді до розділу 1

**1.2.1.** Це – найпростіший випадок, коли сила не залежить ні від часу, ні від координати, ні від швидкості. Якщо вісь  $x$  спрямована вертикально вгору, то потенціальна енергія в полі сили тяжіння дорівнює  $U = gx$ , сила  $F = -g$ , рівняння руху має вигляд

$$m\ddot{x} = -g.$$

За формулою (1.5) знаходимо

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2};$$

$$v(t) = v_0 - g(t - t_0).$$

При  $v_0 < 0$  частинка відразу падає вниз. Якщо ж  $v_0 > 0$ , то до моменту  $t = t_* = t_0 + v_0/g$ , тобто до висоти  $x = x_0 + v_0^2/2g$  частинка рухається вгору. При  $t = t_*$  швидкість обертається на нуль і потім частинка падає вниз.

**1.2.2.** Двічі інтегруючи рівняння руху маємо

$$\begin{cases} v(t) = \frac{\alpha}{m} \left( t - \frac{t^2}{2} \right) + v_0; \\ x(t) = \frac{\alpha}{m} \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) + v_0 t. \end{cases}$$

Час зупинки  $t_*$  знаходимо з умови  $v(t_*) = 0$ , що дає  $t_* = 1 + \sqrt{1 + \frac{2mv_0}{\alpha}}$ .

Пройдений шлях при цьому дорівнює

$$S = x(t_*) = \frac{\alpha}{3m} \left[ \left( 1 + \frac{3mV_0}{\alpha} \right) + \left( 1 + \frac{2mV_0}{\alpha} \right)^{3/2} \right].$$

**1.2.3.** Закон руху частинки має вигляд

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + V_0 t,$$

а середня швидкість збігається з початковою  $\bar{v} = V_0$ .

**1.2.4.** З формули (1.4) виходить, що швидкість після вимикання дії сили дорівнює

$$v = V_0 + \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t_*$$

та може бути як більше, так і менше початкової.

**1.2.5.** Координата частинки змінюється за законом

$$x(t) = \frac{eE_0}{mk} \left( t - \frac{\sin kt}{k} \right).$$

Середня швидкість дорівнює

$$\bar{v} = \frac{eE_0}{mk}.$$

**1.2.6.** Динаміка частинки описується формулою

$$x(t) = \left( \frac{F_0}{m\omega^2} \right) \cos \delta - \left( \frac{F_0}{m\omega} \right) t \sin \delta + \left( \frac{F_0}{m} \right) \cos(\omega t + \delta).$$

Середня швидкість залежить від початкової фази сили у такий спосіб

$$\bar{v} = -\frac{F_0}{m\omega} \sin \delta.$$

**1.2.7.** З формули (1.4) випливає, що

$$v(\infty) = \frac{F_0}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\text{ch}^2(\kappa t)} = \frac{2F_0}{\kappa m}.$$

**1.2.8.** З формули (1.4) для швидкості виходить, що

$$v(t) = \frac{F_0}{m} \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{\operatorname{ch}^2(\kappa t')} = \frac{2F_0}{\kappa m} \frac{1}{1 + \exp(-2\kappa t)}.$$

Інтегруючи цей вираз ще раз знаходимо для зсуву частинки

$$x(t) = \frac{2F_0}{\kappa m} \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{1 + \exp(-2\kappa t')} = \frac{F_0}{\kappa^2 m} \ln[1 + \exp(2\kappa t)].$$

Із цих двох формул маємо шукане співвідношення

$$\dot{x} = \frac{2F_0}{\kappa m} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\kappa^2 m}{F_0} x\right) \right].$$

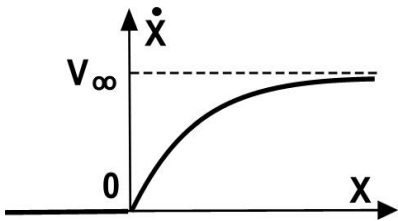


Рис. 1.10. Динаміка зображувальної точки на фазовій площині

На площині  $(\dot{x}, x)$  («фазовій площині») отримана залежність зображена на рис. 1.10.

При малих значеннях  $x$  асимптотика має вигляд  $\dot{x} \approx 2\kappa x$ , а на нескінченності швидкість експоненційно прямує до свого максимального значення  $v(\infty) = 2F_0/\kappa m$ .

**1.2.9.** У часовому інтервалі  $0 < t < T$  для швидкості та координати легко отримати вирази  $\dot{x} = F_0 t/m$ ,  $x = F_0 t^2/2m$  та залежність

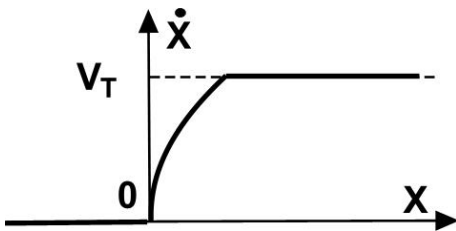


Рис. 1.11. Динаміка зображувальної точки на фазовій площині

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2F_0}{m}} \sqrt{x}.$$

Максимальна швидкість  $v_T = F_0 T/m$  досягається в момент  $t = T$ . Відповідна залежність наведена на рис. 1.11.

**1.2.10.** За допомогою формул (1.4), (1.5) знаходимо розв'язок, який задовольняє початковим умовам при  $t = -\infty$

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{2m\kappa} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\kappa t)}; \quad x(t) = \frac{F_0}{2m\kappa^2} [1 + \operatorname{th}(\kappa t)]; \quad x_{\max} = \frac{F_0}{m\kappa^2}.$$

Із цих формул знаходимо залежність

$$\dot{x} = 2\kappa x \left( 1 - \frac{m\kappa^2}{F_0} x \right),$$

яка наведена на рис. 1.12.

**1.3.1.** Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії тіла із Землею дорівнює  $U = -\gamma m M / (R + x)$ , де координата  $x$  спрямована від центра Землі. Оскільки сила тяжіння на поверхні Землі  $F(x=0) = -\gamma m M / R^2 = -mg$ , то  $U = -gmR^2 / (R + x)$ , а повна енергія дорівнює

$$E = \frac{mV^2}{2} - \frac{mgR^2}{R+x}.$$

З урахуванням початкових умов  $x(0) = h$ ,  $v(0) = 0$  знаходимо, що  $E = -mgR^2 / (R + h)$ , а з умови  $v = v_{\max}$  при  $x = 0$  знаходимо максимальну швидкість тіла

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}.$$

За допомогою знайденого значення повної енергії та виразу для потенціальної енергії перепишемо формулу (1.9) для розв'язання задачі у прихованому вигляді

$$t = \sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}} \int_x^h \frac{\sqrt{R+x}}{\sqrt{h-x}} dx.$$

Після природної заміни змінної інтегрування  $\sqrt{h-x} = p\sqrt{R+h}$  отриманий інтеграл зводиться до табличного інтеграла

$$t = \sqrt{\frac{2}{gR^2}} (R+h)^{3/2} \int_0^{\sqrt{\frac{h-x}{h+R}}} \sqrt{1-p^2} dp = \frac{1}{R\sqrt{2g}} \sqrt{R+h} \left( \sqrt{(h-x)(R+x)} + (R+h) \arcsin \frac{\sqrt{h-x}}{\sqrt{R+h}} \right).$$

Якщо  $x = 0$ , то наведена вище формула дає повний час падіння частинки на поверхню

$$T = \frac{1}{R\sqrt{2g}} \sqrt{R+h} \left[ \sqrt{Rh} + (R+h) \arcsin \sqrt{\frac{h}{R+h}} \right].$$

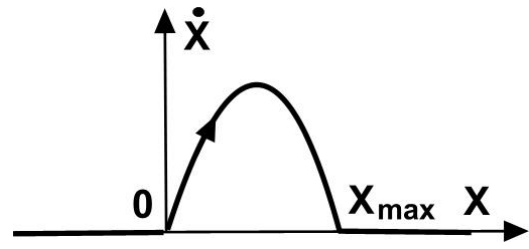


Рис.1.12. Динаміка зображувальної точки на фазовій площині

Розкладаючи цей вираз в ряд Тейлора по малій величині  $h/R \ll 1$ , знаходимо асимптотику для часу падіння  $T \approx \sqrt{2h/g}$  – закон вільного падіння за відсутності сил опору.

**1.3.2.** Для сили  $F = -\alpha/x^2$  потенціальна енергія дорівнює  $U = -\alpha/x$ . З початкових умов маємо  $E = -\alpha/\beta$ . За таких умов з формули (1.8) знаходимо величину швидкості в момент  $t_1$ :  $v = -\sqrt{2\alpha/m\beta}$ , а формула (1.9) в цей момент часу зводиться до виразу

$$t_1 = \sqrt{\frac{m\beta}{2\alpha}} \int_{\beta/2}^{\beta} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{\beta-x}} = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

**1.3.3.** Потенціальна енергія, яка відповідає наведеній сумарній силі, має вигляд

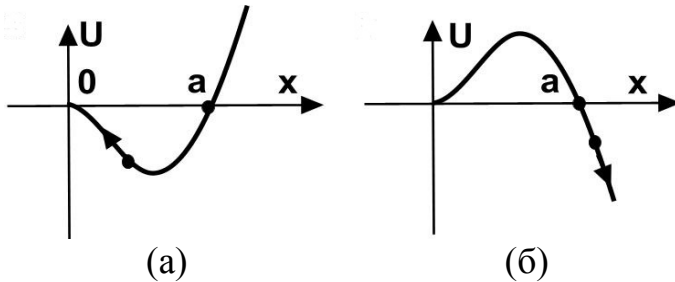


Рис. 1.13. Вид потенціальних енергій у двох розглянутих випадках і траєкторії руху частинки

$$U = -\frac{C_1}{2}mx^2 + \frac{C_2}{4}mx^4$$

та зображена на рис. 1.13(а). Зі статичної початкової умови впливає значення повної енергії

$$E = -\frac{C_1}{2}ma^2 + \frac{C_2}{4}ma^4,$$

а з виразу (1.8) для нульової швидкості при  $x = 0$  – співвідношення між параметрами

$$2C_1 = a^2C_2.$$

При цьому повна енергія системи дорівнює нулю.

Для розглянутої потенціальної енергії вираз (1.9) зводиться до

$$t = \sqrt{\frac{2}{C_2}} \int_x^a \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \text{Arch} \frac{a}{x}.$$

Отже, у цій задачі залежність  $x = x(t)$  знаходиться в явному вигляді

$$x = a \operatorname{sech}(\sqrt{C_1}t).$$

Частинка «скочується» із точки  $x = a$  на рис. 1.13(а) та за нескінченний час досягає максимуму потенціальної енергії в точці  $x = 0$ .

При протилежному виборі знаків сталих  $C_1, C_2$  при обраних початкових умовах частинка йде на нескінченність (див. рис. 1.13(б)).

**1.3.4.** Особливістю гравітаційного потенціалу є те, що при однорідній густині кулі сила, яка діє на тіло, що перебуває на відстані  $x$  від його центра, від усього об'єму поза радіусом  $x$  дорівнює нулю. При цьому сила, що діє з боку внутрішності сфери радіуса  $x$ , така ж, як і у випадку, коли вся маса зосереджена в центрі сфери. Отже, у випадку однорідної кулі радіуса  $R$  із густиною  $\rho$  на тіло на відстані  $x$  від центру діє сила

$$F = -\gamma m \left( \frac{4\pi x^3}{3} \right) \frac{\rho}{x^2} = - \left( \frac{4\pi \gamma m \rho}{3} \right) x = - \frac{mg_0 x}{R}.$$

Рівняння руху має вигляд

$$\ddot{x} + \left( \frac{g_0}{R} \right) x = 0.$$

Частота коливання та період коливання дорівнюють

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}}, T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

відповідно.

**1.3.5.** З формули (1.9) виходить, що

$$T_{ab} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 - \alpha a^2}} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \int_1^{b/a} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \ln \frac{2b}{a}.$$

Отже, у граничному випадку  $a \rightarrow 0$  асимптотика має вигляд  $T_{ab} \sim \ln|E_0|$ .

У випадку потенціалу  $E = -\beta x^4$  за умови  $a/b \ll 1$  маємо

$$T_{ab} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\beta x^4 - \beta a^4}} = \sqrt{\frac{m}{2\beta}} \frac{1}{a} \int_1^{b/a} \frac{dz}{\sqrt{z^4 - 1}} \approx \sqrt{\frac{m}{4\beta}} \frac{1}{a} \ln \frac{2b}{a}.$$

Отже, асимптотика часу «скочування» частинки така

$$T_{ab} \sim \frac{\ln|E_0|}{\sqrt[4]{|E_0|}}.$$

**1.3.6.** Відповідно до формули (1.8) побудуємо для потенціалу (рис. 1.15(а)) графік (рис. 1.15(б)) функції  $-U(x)$  та сім'ю кривих (рис. 1.15(в))  $F = E - U(x)$  з довільними значеннями енергії  $E$ . На рис. 1.15в виділені залежності  $F(x)$  для характерних значень енергій, які відповідають мінімумам у точках  $x_2, x_4$  та максимумам потенціальної

енергії в точках  $x_1, x_3, x_5$ . Потім треба знайти алгебраїчний корінь функції  $F$ . При цьому, якщо залежність  $F(x)$  перетинає вісь  $x$  ( $F = \mu(x - x_0)$ ), то на фазовому портреті цій точці відповідає коренева особливість  $v \sim \pm \sqrt{\mu} \sqrt{x - x_0}$  (див. рис. 1.14(a)). Якщо функція  $F(x)$  торкається вісі  $x$  ( $F = \delta(x - x_*)^2$ ), то на фазовому портреті цій точці відповідає особлива точка типу сідла  $v \sim \pm \sqrt{\delta}(x - x_*)$ . (див. рис. 1.14(б)).

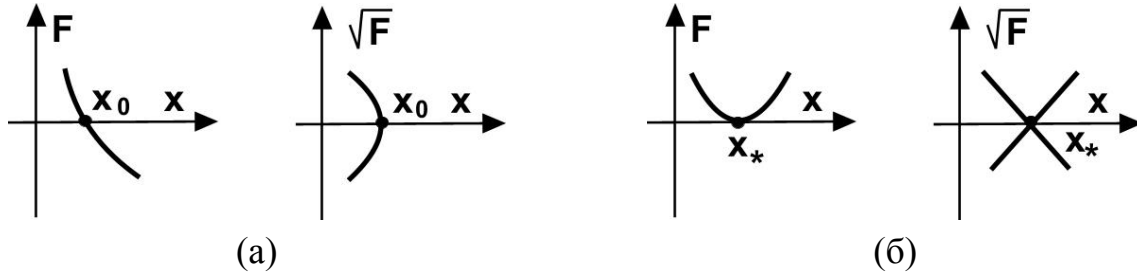


Рис. 1.14. Поява корневих особливостей і сідел на фазовому портреті системи

Дотримуючись цих правил легко відновити за графіком на рис. 1.15(в) весь фазовий портрет системи (див. рис. 1.15(г)).

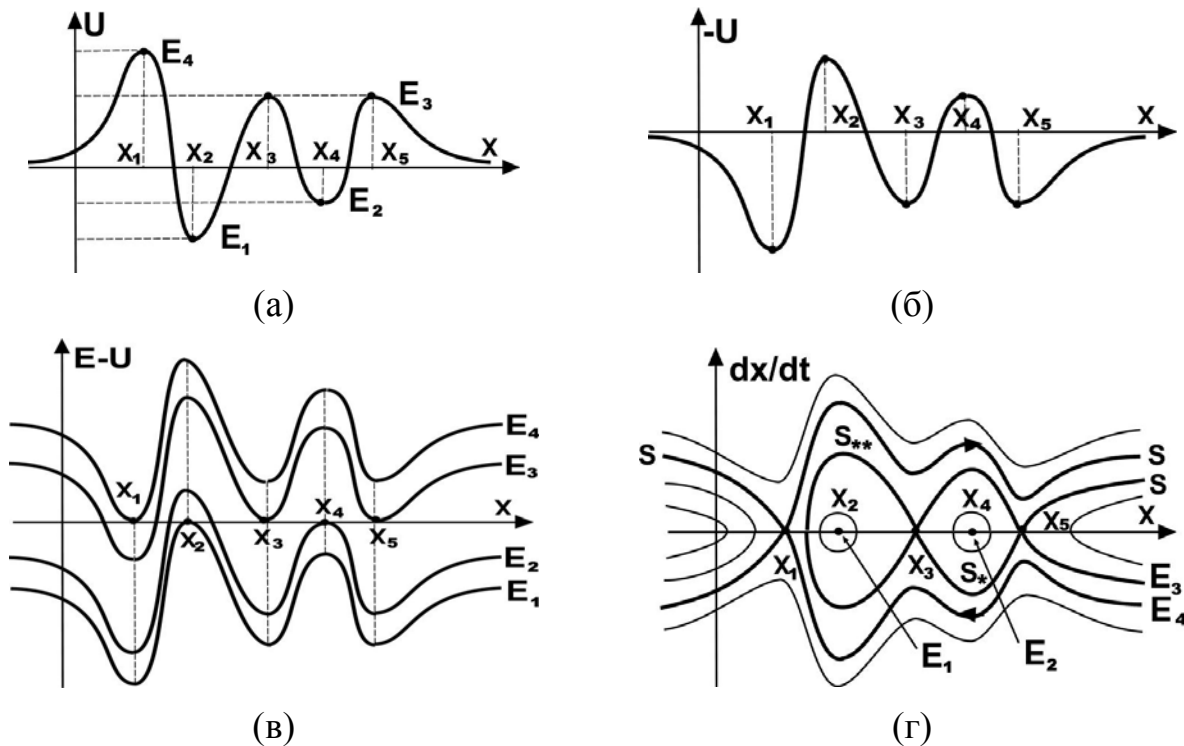


Рис. 1.15. Побудова фазового портрета системи по заданому профілю потенціальної енергії

На цьому малюнку особливі точки типу центр  $x_2, x_4$  відповідають мінімумам енергії  $E_1, E_2$  на рис. 1.15(a), сідлові особливі точки  $x_1, x_3, x_5$  —



максимумам потенціальної енергії  $E_3, E_4$ . Особливі лінії ( $S$  на рис. 1.15(г)), що розділяють фазові траєкторії з різним характером руху, називаються *сепаратрисами*. Вони можуть «починатися» у сідлових точках та «йти» на нескінченність ( $S$  на рис. 1.15(г)), «починатися» та «закінчуватися» в одній і тій самій сідловій точці ( $S_*$  на рис. 1.15(г)), утворюючи сепаратрисну петлю, або «з'єднувати» дві різні сідлові точки ( $S_{**}$  на рис. 1.15(г)). Замкнуті сепаратриси виділяють на фазовому портреті області коливального руху.

**1.3.7.** Відповідно до формули (1.9) час повернення дорівнює

$$T = \sqrt{2m} \int_{-a}^{\text{sign}E \cdot (|E/\alpha|)^{1/3}} \frac{dx}{\sqrt{E - \alpha x^3}} = \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt[3]{\alpha}} \frac{1}{|E|^{1/6}} \int_{-a(\alpha/|E|)^{1/3}}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^3}} \approx \frac{C}{|E|^{1/6}} \int_{-\infty}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^3}}.$$

На рис. 1.16 зображені залежність  $T = T(E)$  при малих енергіях (а) та фазовий портрет системи (б).

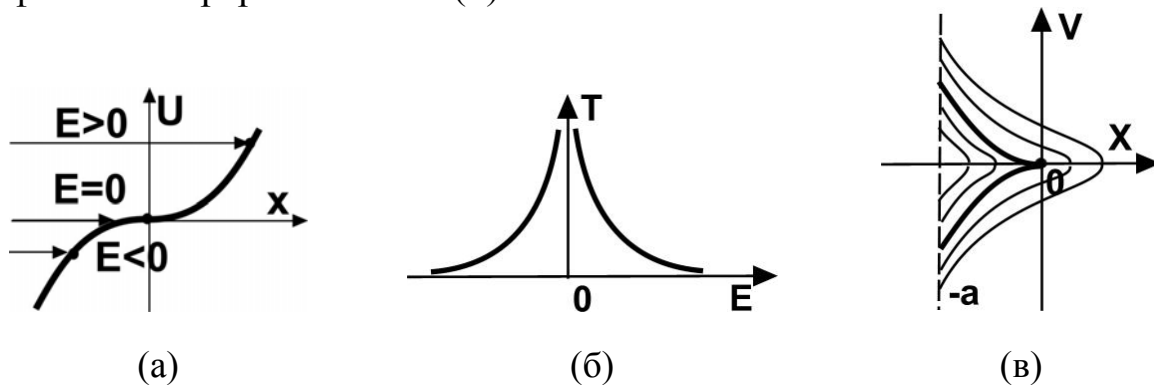


Рис. 1.16. Відбиття частинки від потенціального рельєфу (а), залежність часу відбиття від енергії (б) та фазовий портрет системи (в)

**1.4.1.** Направимо вісь  $Ox$  вертикально вгору (сила тяжіння  $-mg$  спрямована вниз). Задача розв'язується у два етапи. На першому етапі при  $0 < t < t_0$  частинка рухається вгору до висоти  $x = h$ , на якій швидкість прямує до нуля. Рівняння руху, що відповідає руху частинки вгору, пишеться у вигляді

$$m \dot{v} = -mg - kmv^2;$$

$$v(0) = v_0; \quad x(0) = 0.$$

Оскільки за умовою задачі необхідно визначити тільки залежність швидкості падіння від початкової швидкості, скористаємося рівнянням (1.14), з якого маємо

$$\frac{v dv}{g + kv^2} = -dx; \quad \frac{1}{2k} \ln(g + kv^2) = -x + C_1.$$

Сталу  $C_1$  знаходимо з початкових умов

$$C_1 = \frac{1}{2k} \ln(g + k v_0^2); \quad x = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{g + k v_0^2}{g + k v^2}\right).$$

Максимальну висоту  $h$ , на яку підніметься тіло, визначаємо з умови  $v = 0$

$$h = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{g + k v_0^2}{g}\right).$$

На другому етапі руху тіло падає з висоти  $h$  з нульовою початковою швидкістю. Оскільки при цьому швидкість змінює напрямок, то основне рівняння перетворюється на таке (змінюється напрямок сили тертя):

$$m \dot{v} = -mg + kmv^2$$

з початковими умовами в точці максимального підйому  $h$  в момент  $t_0$

$$v(t_0) = 0; \quad x(t_0) = h.$$

Його розв'язання є очевидним

$$\frac{1}{2k} \ln(g - k v^2) = x + C_2.$$

Стала  $C_2$  знаходиться з умов у точці максимального підйому  $h$

$$C_2 = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{g^2}{g + k v_0^2}\right).$$

Остаточно знаходимо координату  $x$ , як функцію швидкості  $v$

$$x = \frac{1}{2k} \ln\left[\frac{(g + k v_0^2)(g - k v^2)}{g^2}\right].$$

Швидкість, якої тіло досягає при падінні на Землю, знайдемо з умови  $x = 0$ :

$$v_l = -\frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{k v_0^2}{g}}}.$$

**1.4.2.** Задача за своєю постановкою близька до попередньої. Варто пам'ятати, що вага тіла  $P = gm$ , а  $\kappa^2 = k/g$  в позначеннях попередньої задачі. Тому

$$h = \frac{1}{2g\kappa^2} \ln(1 + v_0^2 \kappa^2).$$

Для знаходження часу підйому треба скористатися другою формулою з (1.16):

$$T = \int_0^{v_0} \frac{m dv}{mg + \kappa^2 P v^2} = \frac{1}{g\kappa} \operatorname{arctg}(\kappa v_0).$$

**1.4.3.** Тіло падає вниз і напрямом сили тертя в попередній задачі змінює знак у формулі (1.16). Тому

$$t = \frac{1}{\kappa g} \operatorname{Arcth}(\kappa v); \quad v = \frac{1}{\kappa} \operatorname{th}(\kappa g t).$$

Гранична швидкість дорівнює  $v(t \rightarrow \infty) = v_{\max} = 1/\kappa$ . Граничне значення швидкості визначається умовою рівності сили тяжіння та сили тертя  $R = mg$ .

**1.4.4.** Відповідь:  $x = \frac{m}{\eta} \ln \left[ \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{\eta g}{m}} t \right) \right]$ .

Зростання швидкості визначається формулою

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\eta}} \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{\eta g}{m}} t \right),$$

а залежність  $v = v(x)$  має вигляд

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\eta}} \sqrt{1 - \exp \left( \frac{-2\eta x}{m} \right)},$$

наведений на рис. 1.17.

**1.4.5.** Відповідь

$$v = \frac{2mg}{\alpha + 2m\lambda \operatorname{cth}(\lambda t)}; \quad v_{\max} = \frac{2mg}{\alpha + 2m\lambda}; \quad \lambda = \frac{1}{2m} (\alpha^2 + 4\beta mg)^{1/2}.$$

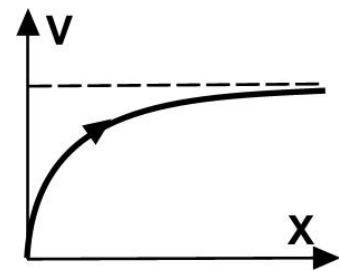


Рис. 1.17. Фазовий портрет системи

**1.4.6. Відповідь**

$$v(t) = \frac{P}{kS} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{kS}{M}t\right) \right]; \quad x(t) = \frac{P}{kS} \left\{ t - \frac{M}{kS} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{kS}{M}t\right) \right] \right\}.$$

$$1.4.7. \text{ Відповідь } v = v_{\max} \sqrt{1 - \exp\left[-\left(\frac{2gx}{v_{\max}^2}\right)\right]}.$$

**1.5.1. Рівняння руху має вигляд (вісь  $Ox$  спрямована вгору)**

$$m \frac{dv}{dt} = \beta v^2 - \frac{mgR^2}{(R+x)^2}; \quad \begin{cases} v(0) = -v_0; \\ x(0) = H. \end{cases}$$

Нехай швидкість  $v$  є шуканою функцією, а  $x$  – незалежною змінною. Тоді рівняння руху прийме вигляд

$$mv \frac{dv}{dx} - \beta v^2 = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}$$

або

$$\frac{dv^2}{dx} - \frac{2\beta}{m} v^2 = -\frac{2gR^2}{(R+x)^2}.$$

Розв'язуючи лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами із правою частиною методом варіації довільної сталої знаходимо з урахуванням початкових умов:

$$v^2 = v_0^2 \exp\left[-\frac{2\beta(H-x)}{m}\right] + 2gR^2 \int_x^H \frac{\exp[2\beta(x-x')/m]}{(R+x')^2} dx'.$$

При падінні з малої висоти  $H \ll R$  швидкість на поверхні Землі приблизно дорівнює

$$v^2 \approx \left( v_0^2 - \frac{4g\beta}{m} \right) e^{-\frac{2\beta H}{m}} + \frac{4g\beta}{m}.$$

Отже, на поверхні Землі  $v(x=0) > v_0$  при  $v_0 < \sqrt{4g\beta/m}$ .

**1.5.2. Як і при розв'язанні задачі 1.9.1 у рівнянні руху**

$$m \frac{dv}{dt} = -\beta v^2 + \Phi(x); \quad \begin{cases} \dot{x}(t_0) = v_0 > 0; \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

вважаємо  $v$  шуканою функцією, а  $x$  – незалежною змінною. Отримаємо

$$\frac{d}{dx}(v^2) + \frac{2\beta}{m} v^2 = \frac{2}{m} \Phi(x); \quad v(x_0) = v_0.$$

Після інтегрування знаходимо залежність швидкості від координати

$$v^2 = v_0^2 \exp\left[\frac{2\beta}{m}(x_0 - x)\right] + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x \Phi(x') \exp\left[\frac{2\beta}{m}(x' - x)\right] dx'.$$

Друге інтегрування дає остаточну відповідь для прихованої залежності координати від часу:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \left[ v_0^2 \exp\left[-\frac{2\beta(x' - x_0)}{m}\right] + \left(\frac{2}{m}\right) \exp\left(-\frac{2\beta x'}{m}\right) \int_{x_0}^{x'} \Phi(x'') \exp\left(\frac{2\beta x''}{m}\right) dx'' \right]^{-1/2} dx'.$$

**1.5.3.** У цьому прикладі рівняння має вигляд

$$m \ddot{x} + m\omega_0^2 x = -\beta \dot{x} |\dot{x}|$$

або

$$\frac{d}{dx} v^2 + \lambda v |v| = -2\omega_0^2 x,$$

де  $\lambda = 2\beta/m$ . Як і в попередній задачі, розв'язання знаходимо методом варіації довільної сталої

$$v^2 = \frac{2\omega_0^2}{\lambda^2} \left\{ (1 + \lambda x) - (1 + \lambda a) \exp[\lambda(x - a)] \right\}.$$

Зазначимо, що при коливанні частинки напрямок швидкості змінює знак, але ми розглядаємо тільки один півперіод коливання (див. жирну лінію на рис. 1.18), на якому швидкість не міняє знак і негативна.

Розв'язання отриманого рівняння при  $v=0$  дає при малому загасанні координату частинки після проходження половини періоду від початку руху  $a' \approx -a + 2\lambda a^2/3$ . Отже, зміна амплітуди коливання за час  $\Delta t = \pi/\omega_0$  становить  $\Delta a = -2\lambda a^2/3$ . Тому швидкість убутання амплітуди дорівнює

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2\lambda\omega_0}{3\pi} a^2; \quad a = \frac{3\pi}{2\lambda\omega_0 t}.$$

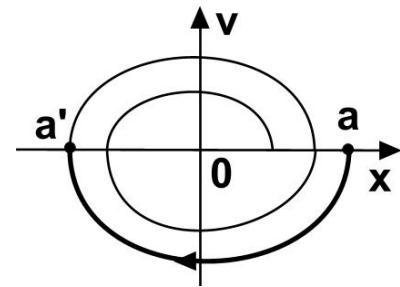


Рис. 1.18. Траєкторія руху зображуючої точки на фазовому портреті системи

Степеневе падіння амплітуди є характерним для нелінійного тертя (при лінійному по швидкості загасанні амплітуда спадає експоненційно). Якісно цей результат можна здобути у такий спосіб. Помножимо вихідне рівняння на  $x$ , проінтегруємо його по інтервалу часу,  $\Delta t = \pi/\omega_0$ , підставимо в праву частину наближене розв'язання  $x \approx a \sin \omega_0 t$  та отримаємо вираз для зменшення енергії за півперіод  $\Delta E \approx -4\sqrt{2}\lambda E^{3/2}/3\omega_0$ , де  $E = \omega_0^2 a^2/2$ . Розділивши отриманий вираз на  $\Delta t = \pi/\omega_0$  та проінтегрувавши отриману відповідь знайдемо наведений вище результат.

#### 1.5.4. Відповідь

$$x = \frac{a}{\alpha + \beta} (\alpha e^{\beta t} + \beta e^{-\alpha t}); \quad \alpha = k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2}; \quad \beta = -k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2}.$$

Асимптотично для великих значень  $t \gg 1/\alpha$

$$x \approx \left( \frac{a\alpha}{\alpha + \beta} \right) \exp(\beta t).$$

#### 1.5.5. Рівняння руху

$$m\dot{v} = \frac{-\alpha m v^2}{\beta + x}$$

можна дати у вигляді

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\alpha dx}{x + \beta}.$$

Інтегруючи двічі з урахуванням початкових умов знаходимо закон руху

$$x = \beta \left\{ \left[ \left( \frac{\alpha + 1}{\beta} \right) v_0 t + 1 \right]^{\frac{1}{\alpha + 1}} - 1 \right\}.$$

**1.5.6.** У цій задачі можна скористатися розв'язком загального вигляду (1.19), у якому

$$\varphi_1 = \sin \omega_0 t; \quad \varphi_2 = \cos \omega_0 t; \quad W = \omega_0; \quad P = f \sin \omega t.$$

Обчислення інтегралів дає остаточний вираз для загального розв'язку

$$u = \frac{f \sin \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} + C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t.$$

Як видно із цієї формули, при малих частотах  $|\omega| < \omega_0$  осцилятор коливається у фазі із зовнішнім полем, а при великих частотах  $|\omega| > \omega_0$  – у протифазі.

**1.5.7.** У цій задачі, як і в попередній, можна скористатися розв'язком загального вигляду (1.19), у якому

$$\varphi_1 = \sin \omega_0 t; \quad \varphi_2 = \cos \omega_0 t; \quad W = \omega_0; \quad P = f \sin \omega_0 t.$$

Обчислення інтегралів дає остаточний вигляд частинного розв'язку

$$u = -\frac{f \cos \omega_0 t}{2\omega_0^2} \omega_0 t,$$

амплітуда якого лінійно зростає з часом (*явище резонансу*).

**1.5.8.** При малих амплітудах коливань можна скористатися *резонансним* наближенням, у якому розв'язок шукається в такому ж функціональному вигляді, що й для лінійного осцилятора, але з не визначеною частотою, і при підстановці його в рівняння залишаються тільки доданки з основною гармонікою.

У цьому випадку після підстановки в рівняння

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha x^3$$

наближеного розв'язку у вигляді  $x \approx a \sin \omega t$  (нагадаємо, що розв'язок незбуреного рівняння має вигляд  $x \approx a \sin \omega_0 t$ ) і відкидання доданка  $\sim \sin 3\omega t$ , отримуємо відповідь

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 - \frac{3}{4} \alpha a^2.$$

**1.5.9.** Для знаходження стаціонарних (періодично залежних від часу) розв'язків рівняння

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \eta(b^2 - x^2)\dot{x}$$

помножимо його на  $\dot{x}$  і отримаємо часову залежність енергії коливання

$$\frac{dE}{dt} \approx \eta(b^2 - x^2)\dot{x}^2.$$

Підставивши в це співвідношення розв'язок для руху незбуреного лінійного осцилятора  $x \approx a \sin \omega_0 t$  та інтегруючи його по періоду

коливання  $T = 2\pi/\omega_0$ , знаходимо  $\Delta E \approx \frac{1}{8} T \eta \omega_0^2 a^2 (4b^2 - a^2)$ .

У стаціонарному випадку  $\Delta E = 0$  і розв'язання має вигляд періодичних коливань (*граничного циклу*)  $x \approx 2b \sin \omega_0 t$ . Оскільки енергія коливання гармонійного осцилятора дорівнює  $E \approx a^2 \omega_0^2 / 2$ , а на граничному циклі  $E_0 \approx 2b^2 \omega_0^2$ , то отримане співвідношення для енергії можна переписати у вигляді

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \approx \frac{2\eta}{\omega_0^2} E(E_0 - E).$$

Це наближене рівняння описує процес наближення коливань до граничного циклу. При  $E < E_0$  рішення має вигляд

$$E \approx \frac{E_0}{1 + \exp(-4\eta b^2 t)}$$

та експоненціально наближається до граничного циклу. При  $E > E_0$  маємо

$$E \approx E_0 + c \exp(-4\eta b^2 t).$$

Отже, рух на граничному циклі в цьому випадку є стійким.

**1.5.10.** У цій задачі також можна скористатися резонансним наближенням. З рівняння

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -h\omega_0^2 \cos \omega t x \quad (1.47)$$

видно, що резонансним наближенням можна скористатися для розв'язків вигляду  $x \approx a \cos(\omega t/2)$  та  $x = b \sin(\omega t/2)$ , які при підстановці в це рівняння дають нетривіальний результат. Підставляємо в (1.47) такий розв'язок

$$x \approx a \cos(\omega t/2) + b \sin(\omega t/2).$$

Коефіцієнти при  $\cos(\omega t/2)$  та  $\sin(\omega t/2)$  мають дорівнювати нулю. Виходячи з цього знаходимо залежності частот стаціонарних одночастотних коливань від амплітуди змінного поля

$$\omega^2 \approx (2\omega_0)^2 \left( 1 \pm \frac{h}{2} \right).$$

**1.6.1.** В цій системі існують два критичних значення параметра  $K/k$ . Побудуємо лінії рівня енергії для таких випадків: а)  $K/k < 2/3$ ; б)  $2/3 < K/k < 1$ ; в).  $K/k > 1$  (див. рис. 1.19).



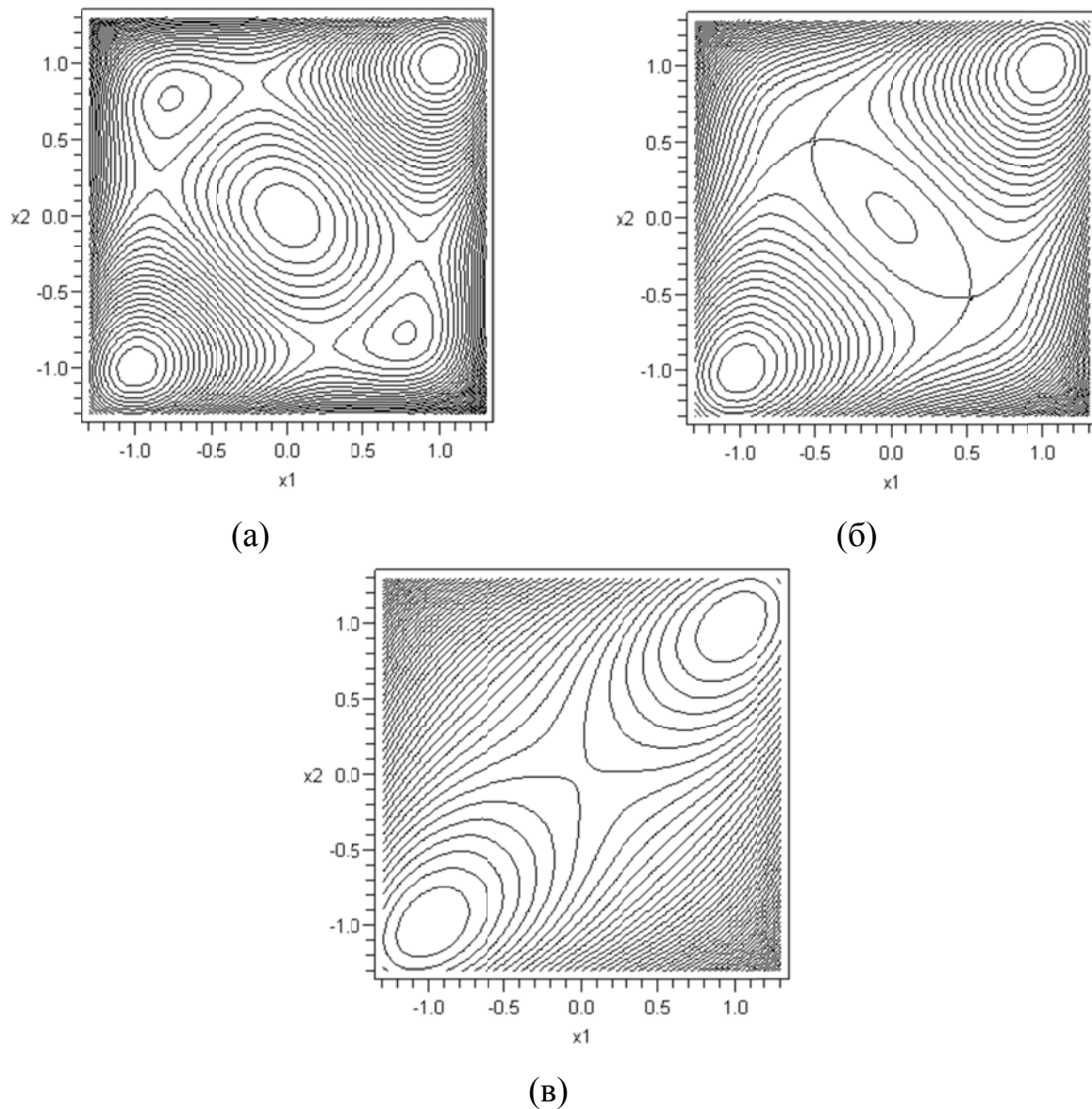


Рис. 1.19. Лінії рівня перетинів поверхні потенціальної енергії ізоенергетичними площинами при різних значеннях внутрішньої жорсткості зв'язку в димері

З рис. 1.19 видно як з ростом параметра  $K$  чотири перевальні точки зливаються у дві, а потім – в одну. При великій початковій швидкості димер може переходити між різними станами без збудження внутрішніх рухів. (Порівняйте отримані в програмі Maple рисунки з якісними залежностями, наведеними на рис. 1.6).

Програма в Maple записується так

```
>with(plots);
>k:=1;
>K:=0.1;
>U:=k*(x1^2-1)^2/2+k*(x2^2-1)^2/2+K*(x1-x2)^2/2;
>contourplot(U(x1,x2), x1=-1.5..1.5, x2=-1.5..1.5, grid=[120,120],
contours=32, color=black, thickness=1, axis=boxed).
```

**1.6.2.** Для знаходження мінімальної енергії переходу необхідно обчислити енергії в перевальних точках. Як і для інших екстремальних точок їхнє положення визначається рішенням системи рівнянь  $\partial V / \partial x_1 = \partial V / \partial x_2 = 0$ . В цьому випадку маємо

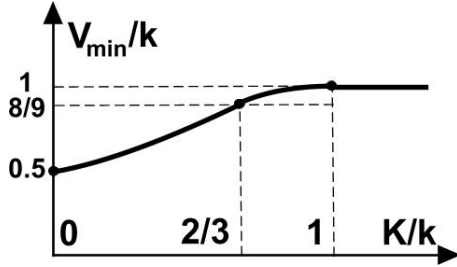


Рис. 1.20. Залежність критичної енергії переходу димера між двома станами від пружних характеристик димера й зовнішнього поля

$$2k(x_1^2 - 1)x_1 + K(x_1 - x_2) = 0;$$

$$2k(x_2^2 - 1)x_2 + K(x_2 - x_1) = 0.$$

Звідси випливає, що в абсолютних мінімумах  $x_1 = x_2 = \pm 1$  енергія  $V = 0$ , у максимумі  $x_1 = x_2 = 0$  енергія дорівнює  $V = k$ . У відносних мінімумах  $x_1 = -x_2 = \pm \sqrt{1 - K/k}$  при  $K/k < 2/3$  маємо  $V = K(2 - K/k)$ , а в перевальних точках  $2x_{1,2}^2 = 1 - s \pm \sqrt{(1 - 3s)(1 + s)}$ , де

$s = K/2k$ , енергія дорівнює  $V = [(1 + K/2k^2)k]/2$ . При  $2/3 < K/k < 1$  в єдиній перевальній точці, як і раніше  $V = K(2 - K/k)$ . Графік отриманої залежності мінімальної енергії переходу між різними станами димера зображений на рис. 1.20.

Залежність  $V_{\min}(K)$  поступово змінюється в критичних точках безперервно разом зі своїми похідними.

**1.6.3.** Геометрія ППЕ системи  $U(x_1, x_2) = U(x, y)$  визначається її особливими точками (мінімумами, максимумами й перевальними точками), розташування яких залежить від співвідношення параметрів  $k$  та  $U_0$ . Ці точки визначаються рівняннями  $\partial U / \partial x_1 = \partial U / \partial x_2 = 0$ , тобто

$$\begin{cases} k(x_1 - x_2 - a) + U_0 \sin \frac{\pi(x_1 - x_2)}{a} \cos \frac{\pi(x_1 + x_2)}{a} = 0; \\ \sin \frac{\pi(x_1 + x_2)}{a} \cos \frac{\pi(x_1 - x_2 - a)}{a} = 0. \end{cases}$$

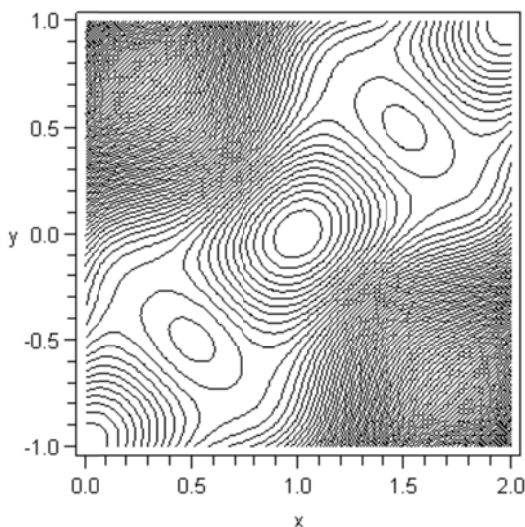
На відміну від попередньої задачі, у цьому випадку ППЕ періодична з періодом  $a$ . При сильній внутрішній взаємодії в димері ( $k/U_0 > \pi/a$ ), крім основних мінімумів при  $x_1 = na$ ,  $x_1 = (n-1)a$ , з енергією  $U = 0$  є перевальні точки при  $x_1 = (n+1/2)a$ ,  $x_2 = (n-1/2)a$ , з енергією  $4U_0$ . При критичному значенні ( $k_0 = \pi U_0/a$ ) відбувається перша бифуркація (народження нових розв'язків) – розв'язок в перевальній точці розщеплюється на точку максимуму при  $x_1 = (n+1/2)a$ ,  $x_2 = (n-1/2)a$  та дві нові перевальні точки

з  $x_1 = (n + 1/2)a \pm \varepsilon/2$  та  $x_2 = (n - 1/2)a \mp \varepsilon/2$  з  $\varepsilon \ll a$ . Трансформація особливих точок має типовий біфуркаційний характер (рис. 1.21(a))

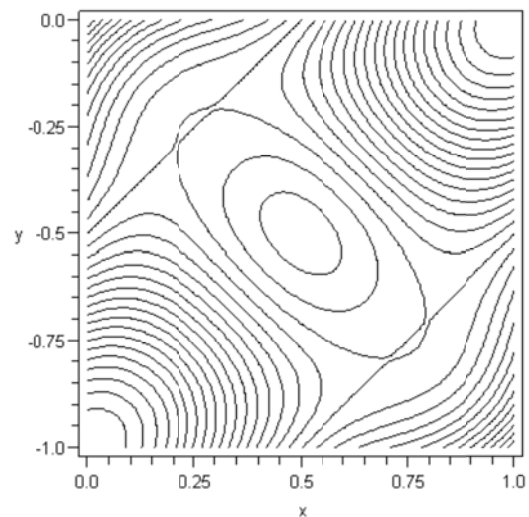
$$\frac{\varepsilon}{a} \approx \pm \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{ak}{\pi U_0}}.$$



(a)



(б)



(в)

Рис. 1.21. (а) Біфуркація особливих точок при критичному значенні параметра  $k = k_0$ ; (б), (в) вигляд перетинів ППЕ при різних співвідношеннях параметрів задачі

Лінії рівня ППЕ для  $k < k_0$  наведені на рис. 1.21(б),(в). Якісний аналіз показує, що при  $k > k_0$  та невеликому перевищенні енергією значення  $4U_0$  димер може рухатися уздовж підкладки як ціле з  $x_2 - x_1 = a$  без внутрішніх коливань. При  $k < k_0$  можливий рух димера уздовж підкладки з енергіями  $E < 4U_0$ , але при цьому відстань між атомами в димері періодично коливається. (Наведені рисунки побудовані в програмі Maple – див. розв'язання задачі 1.6.1).

**1.6.4.** На площині циліндричних координат  $(\varphi, r)$  (див. розд. 2.2) рух частинки проти годинникової стрілки в площині  $(x, y)$  визначається формулою (1.39) і має вигляд, зображений на рис. 1.22(а).

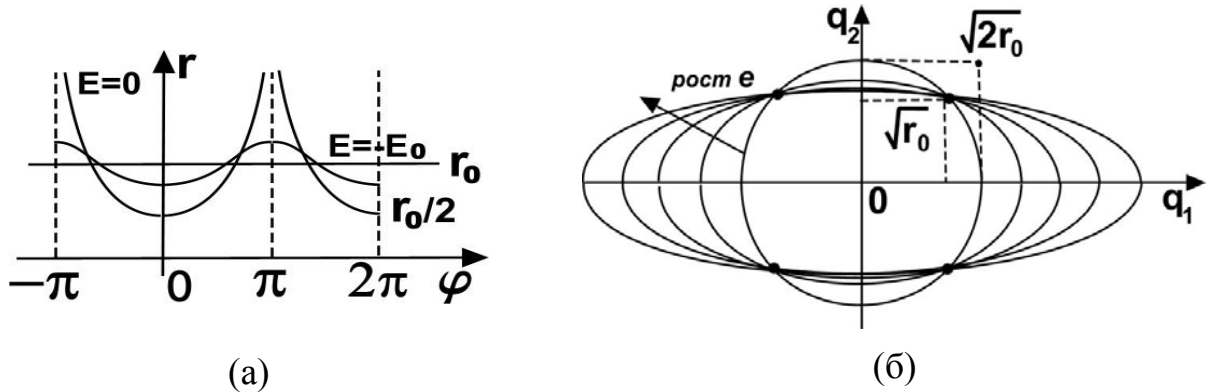


Рис. 1.22. Рух частинки в кеплерівському потенціалі на площині циліндричних (а) і параболічних (б) координат

На рис. 1.22(а) наведено трансформацію залежності  $r = r(\varphi)$  із зростанням енергії від  $E = -E_0 = -\alpha/2r_0$  (горизонтальна пряма) до  $E = 0$  (лінії з особливостями, що відповідають відльоту частинки на нескінченно велику відстань). Асимптотика траєкторії при  $E = 0$  має вигляд  $r = 2r_0/(\pi - \varphi)^2$ .

У параболічних координатах (див. розд. 2.4 та задачу 2.4.2)

$$x = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2); \quad y = q_1 q_2.$$

формула (1.39) для орбіти частинки записується у такий спосіб:

$$(1+e)q_1^2 + (1-e)q_2^2 = 2r_0.$$

Ці залежності при зміні параметра  $e$  (ексцентриситет) в інтервалі  $0 < e < 1$  наведені на рис. 1.22(б). Отже, еліптичні орбіти із центром поля у фокусі еліпса в декартових координатах перетворюються в еліптичні орбіти із центром поля в центрі еліпса в параболічних координатах.

**1.6.5.** Для кеплерівського потенціалу  $U(r) = -\alpha/r$  вираз (1.33) легко переписати у вигляді

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}}$$

і після підстановки  $r - a = -ae \cos \xi$  взяти отриманий інтеграл

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi).$$

Інтегрування цього виразу по періоду руху дає значення

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}.$$

Переписавши формулу (1.39) у вигляді  $x = (r_0 - r)/e$ , знайдемо середнє значення координати  $x$

$$\langle x \rangle = \frac{r_0}{e} - \frac{1}{eT} \int r dt = \frac{r_0}{e} - \frac{a^2}{eT} \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int_0^{2\pi} d\xi (1 - e \cos \xi)(\xi - e \sin \xi) = -\frac{3ae}{2}.$$

Отже

$$\langle \vec{r} \rangle = -\frac{3}{2} a(E) e(E, M) \vec{n} = -\frac{3a(E)}{2\alpha} \vec{A},$$

де  $\vec{n}$  – одиничний вектор у напрямку перигелію (найкоротшої відстані від силового центру поля) орбіти. У цьому ж напрямку орієнтований і вектор  $\vec{A} = e\alpha \vec{n}$ . Положення середньої відстані до центра поля позначено точкою  $B$  на рис. 1.23.

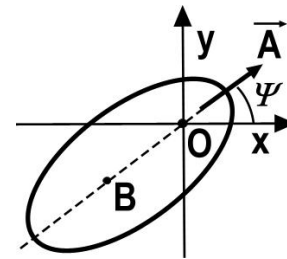


Рис. 1.23. Розташування точки  $B$  середньої відстані частинки, що рухається, від центра кеплерівського потенціалу при заданому напрямку вектора Рунге – Ленца  $\vec{A}$

**1.6.6.** Представивши інтеграл руху у вигляді

$$C = m(\vec{F}, [\vec{v}, [\vec{r}, \vec{v}]]) - \frac{\alpha}{r}(\vec{F}, \vec{r}) + \frac{1}{2}[\vec{F}, \vec{r}]^2$$

та взявши похідну від нього по часу урахуванням рівняння руху

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{\alpha \vec{r}}{r^3} + \vec{F},$$

треба зібрати доданки, пропорційні  $F$  та  $F^2$ . Перший дорівнює нулю через умову  $\dot{\vec{A}} = 0$  при  $F = 0$ . Занулення другого доданка доводиться тривіально.

**1.6.7.** Спрямуємо електричне поле уздовж осі  $Ox$ . Потенціальна енергія в цьому разі має вигляд

$$U = -\frac{\alpha}{r} - \vec{F}\vec{r} = -\frac{\alpha}{r} - Fx,$$

а рух частинки відбувається в площині  $xOy$ . Система має додатковий до енергії інтеграл руху (див. попередню задачу), але ми обмежимося наближеним розглядом динаміки частинки в припущенні малості зовнішнього поля  $F \ll E/a$ , де  $E$  та  $a$  – характерні енергія та розмір траєкторії

незбуреного руху. У цьому випадку вектори  $\vec{M}$ ,  $\vec{A}$  перестають бути інтегралами руху та слабко (через слабке поле  $F$ ) залежать від часу

$$\dot{\vec{M}} = [\vec{r}, \vec{F}]; \quad \dot{\vec{A}} = \frac{1}{m} [\vec{F}, \vec{M}] + [\vec{v}, [\vec{r}, \vec{F}]].$$

При обраній орієнтації поля ці вирази мають вигляд

$$\dot{M} = -yF; \quad \dot{A}_x = -y\dot{y}F; \quad \dot{A}_y = \left( y\dot{x} - \frac{M}{m} \right) F.$$

У слабкому додатковому полі  $\vec{F}$  можливим є поділ повільного руху (зміна  $\vec{M}$ ,  $\vec{A}$ ) та швидких обертань по «кеплерівській» траєкторії. Подальше наближення полягає в усередненні рівнянь по швидким осциляціям із частотою  $\omega \sim \sqrt{\alpha/ma^3}$ . Оскільки  $2y\dot{y} = d(y^2)/dt$  та  $2y\dot{x} = d(xy)/dt - M/m$ , то усереднені по швидких коливаннях рівняння зводяться до системи

$$\dot{M} = -\bar{y}F; \quad \dot{A}_x = 0; \quad \dot{A}_y = -\frac{3M}{2m} F.$$

У попередній задачі було показано, що  $\langle \vec{r} \rangle = -3a\vec{A}/2\alpha$ , тобто  $\langle y \rangle = -A_3 a_y / 2\alpha$ . Отже, кутовий момент та  $y$ -компонента вектора  $\vec{A}$  повільно коливаються із частотою  $\Omega = 3F/\sqrt{8m|E|}$ , яка не залежить від величини моменту  $M$ . При цьому  $A_x = A = \text{const}$ , що в основному наближенні відповідає збереженню інтеграла  $C \approx \vec{A}\vec{F} = A_x F$ .

Отже, якщо в початковий момент часу задати енергію системи  $E$ , значення кутового моменту  $M_0$  (тобто ексцентриситет орбіти  $e_0 = \sqrt{1 - 2|E|M_0^2/m\alpha^2}$ ) і напрямок вектора  $\vec{A}$  уздовж осі  $x$ , то наближена динаміка частинки буде описуватися формулами

$$M = M_0 \cos \Omega t; \quad A_y = -\alpha \sqrt{1 - e_0^2} \sin \Omega t; \quad A_x = \alpha e_0.$$

Напрямок великої осі еліпса коливається, його довжина уздовж цієї осі  $\alpha/|E|$  не змінюється, але він зрушується й звужується, а через чверть періоду перетворюється у відрізок прямої, розташований під кутом  $\psi_0 = \arctg \sqrt{1/e_0^2 - 1}$  (рис. 1.24).

**1.7.1.** За допомогою формул (1.42), (1.43) легко знайти, що сила натягу нитки  $F = -f$  дорівнює

$$f = \frac{m}{l} (x\ddot{x} + y\ddot{y} + gy)$$

або в циліндричних координатах

$$f = -mg \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2.$$

Перший доданок являє собою силу ваги, що розтягує нитку, а другий – відцентрову силу з боку частинки. Підставляючи в цю формулу розв’язок рівняння (1.44), знаходимо часову залежність сили, що розтягує. В граничному випадку малоамплітудних коливань, коли  $\varphi = a \sin \omega_0 t$  ця частина сили дорівнює  $-mga^2 \cos^2 \omega_0 t$  з  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . Сила, що розтягує, максимальна в нижній точці траєкторії з максимальною швидкістю.

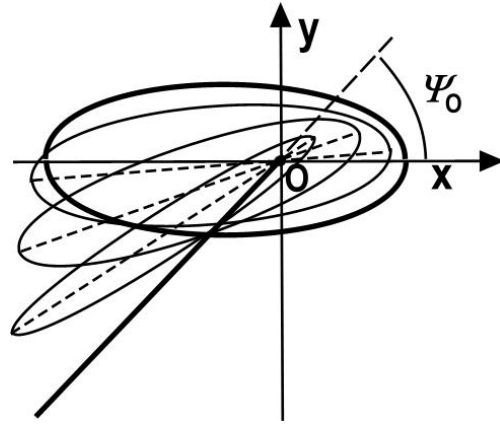


Рис. 1.24. Трансформація траєкторії зарядженої частинки в електростатичному полі заряду й додатковому слабкому постійному електричному полі

**1.7.2.** Скористаємося загальною формулою (1.46), в якій  $F = x^2/2l$ . Маємо рівняння

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x + \frac{1}{l^2}(x^2\ddot{x} + x\dot{x}^2) = 0.$$

Підставляючи в це рівняння розв’язок у вигляді  $x \approx a \sin \omega t$  та залишаючи тільки доданки з основною гармонікою (резонансне наближення), знаходимо нелінійний зсув частоти для малих амплітуд коливання частинки

$$\omega^2 \approx \frac{g}{l} \left( 1 - \frac{a^2}{2l^2} \right).$$

**1.7.3.** З урахуванням сил реакції рівняння Ньютона (1.42), (1.43) у загальному випадку мають такий вигляд

$$m\ddot{x} = -f \sin \psi;$$

$$m\ddot{y} = -mg + f \cos \psi.$$

Звідси

$$f = m(\ddot{y} \cos \psi - \ddot{x} \sin \psi) = \frac{mF''}{\sqrt{1 + (F')^2}} \ddot{x},$$

де залежність  $x(t)$  визначається розв’язком рівняння (1.46).

**1.7.4.** Для координати  $x(t)$  рівняння Ньютона має вигляд

$$(l^2 - x^2)\ddot{x} + x\dot{x}^2 + \frac{g}{l^2}x(l^2 - x^2)^{3/2} = 0.$$

## КРИВОЛІНІЙНІ КООРДИНАТИ

В попередньому розділі, присвяченому ньютонівському підходу в механіці ми користувалися переважно декартовими координатами, але на деяких прикладах переконалися, що в деяких випадках розв'язання динамічних рівнянь істотно спрощується, якщо воно сформульоване не в декартових, а в так званих узагальнених координатах. Прикладом може бути математичний маятник, для якого динамічне рівняння в декартових координатах виглядає досить громіздко (див. задачу 1.13.4), але істотно спрощується в полярних координатах (див. ф-лу (1.44)). Вибір тієї або іншої системи таких координат (криволінійних на відміну від прямолінійних декартових) визначається симетрією задачі.

У цьому розділі ми розглянемо простий випадок двовимірних криволінійних координат, які визначають місце знаходження точки на площині. У випадку двовимірних систем зв'язок криволінійних координат з декартовими особливо наочний. Узагальнення отриманих результатів на тривимірний випадок наведено в розділі 4.

### 2.1. Криволінійні координати у двовимірному просторі

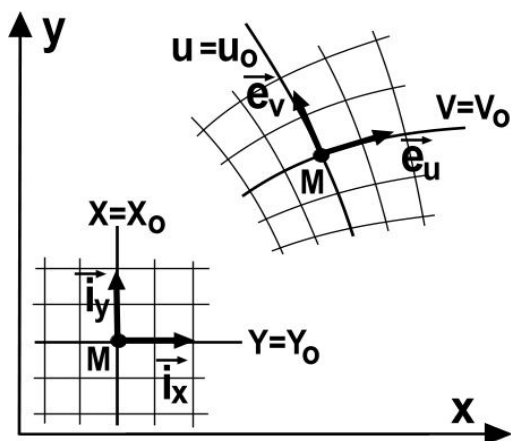


Рис. 2.1. Декартові та криволінійні координати на координатній площині

Розглянемо пари функцій

$$\begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

У двовимірному просторі можна ввести декартові координатні вісі  $(x, y)$ . При цьому положення точки  $M$  на площині визначається її радіус-вектором  $(x, y)$ , який можна уявити у вигляді  $\vec{r} = x\vec{i}_x + y\vec{i}_y$ , де  $\vec{i}_x, \vec{i}_y$  – одиничні ортогональні вектори, а  $x, y$  – прямокутні декартові координати точки  $M$  (рис. 2.1). Це не єдина можливість визначення положення точки на площині.



Якщо із цих співвідношень можна однозначно визначити радіус-вектор точки  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

$$\begin{cases} x = x(u, v); \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (2.2.)$$

то в цьому випадку парою чисел  $\vec{q} = (u, v)$  також можна охарактеризувати позицію точки  $M$ . Про них також можна говорити як про координати. На відміну від декартових координат ці координати називаються *криволінійними*. При заданих значеннях  $u = u_0, v = v_0$ , що характеризують положення точки  $M$  співвідношення (2.2) дають два рівняння

$$\begin{cases} u(x, y) = u_0; \\ v(x, y) = v_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

які визначають дві системи *координатних ліній* на площині. Аналогічно тому як у декартових координатах ми ввели одиничні ортогональні вектори  $\vec{i}_x, \vec{i}_y$ , у системі криволінійних координат можна ввести одиничні вектори  $\vec{e}_u, \vec{e}_v$ , спрямовані по дотичній до координатних ліній криволінійних координат. У загальному випадку ці вектори не ортогональні, як у декартовій системі, але нижче ми будемо розглядати тільки так звані *ортогональні криволінійні координати*, для яких  $\vec{e}_u$  та  $\vec{e}_v$  є ортогональними. Головна відмінність криволінійних координат від звичайних прямокутних декартових координат полягає в тому, що в них напрямки векторів  $\vec{e}_u, \vec{e}_v$  залежать від того, для якої точки  $M$  на координатній площині ці вектори визначені. Координатна лінія  $u$  спрямована вздовж орта  $\vec{e}_u$  перпендикулярно координатної лінії  $v$ , на якій  $u = u_0 = \text{const}$ . Уздовж координатної лінії  $u$  зберігається значення координати  $v = v_0 = \text{const}$ .

При переході до криволінійних координат необхідно знати як розвертаються напрямні одиничні вектори координатної системи, як змінюються вирази для довжин відрізків і площ, а також як перетворюються головні диференціальні операції.

Розглянемо дві сусідні точки  $M(x, y)$  та  $M'(x + dx, y + dy)$ , для яких вектор  $MM'$  являє собою приріст радіуса-вектора  $d\vec{r} = (dx, dy)$ . Обчислимо диференціал  $d\vec{r}$ , розглядаючи  $x, y$  як функції  $u, v$ :

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \end{cases} \quad (2.4).$$

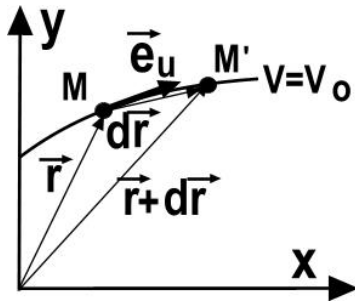


Рис. 2.2. Координатні лінії та орти в криволінійних координатах

або

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv, \quad (2.5)$$

де  $d\vec{r} = dx\vec{i}_x + dy\vec{i}_y$ .

Чотири похідні  $\partial x/\partial u$ ,  $\partial x/\partial v$ ,  $\partial y/\partial u$ ,  $\partial y/\partial v$  повністю визначають локальні перетворення координат. Важливу роль відіграють деякі комбінації цих величин. Розглянемо похідну  $\partial \vec{r}/\partial u$ .

Оскільки при цьому диференціюванні змінна  $v$  вважається постійною, то точки  $M$  та  $M'$  лежать на координатній лінії  $u$ , уздовж якої  $v = v_0$ , а тому вектор  $\partial \vec{r}/\partial u$  спрямований уздовж дотичної до цієї лінії (рис. 2.2):

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \vec{e}_u, \quad (2.6)$$

де  $h_u$  – довжина вектора  $\partial \vec{r}/\partial u = \vec{i}_x (\partial x/\partial u) + \vec{i}_y (\partial y/\partial u)$ , тобто

$$h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}. \quad (2.7)$$

Аналогічно для координатної лінії  $v$  маємо

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = h_v \vec{e}_v; \quad (2.8)$$

$$h_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}. \quad (2.9)$$

Величини  $h_u$ ,  $h_v$  називаються коефіцієнтами Ламе.

За допомогою (2.6) – (2.9) легко переписати диференціал радіус-вектора (2.5) у вигляді

$$d\vec{r} = h_u du \vec{e}_u + h_v dv \vec{e}_v. \quad (2.10)$$

Якщо ввести елемент довжини  $\delta l_u$  уздовж координатної лінії  $u$ , то з формули виходить, що  $\delta l_u = \delta r_u = h_u \delta u$ . Отже, коефіцієнт Ламе  $h_u$  являє собою «масштабний множник», що перетворює зміну криволінійної координати  $\delta u$  на зсув уздовж координатної лінії  $u$  з тією же розмірністю координат, яка є у осей декартових координат. Тому локальний перехід від координат  $(x, y)$  до «координат»  $(h_u u, h_v v)$  зводиться до повороту осей

координат на деякі кути, які залежать від точки на площині. Для прямокутних криволінійних координат кути повороту осей  $u$  та  $v$  збігаються. З формул (2.6) та (2.8) випливають формули, які описують локальний поворот осей криволінійних координат відносно осей декартових координат. Якщо записати (2.6) та (2.8) детально як

$$\frac{\partial x}{\partial u} \vec{i}_x + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{i}_y = h_u \vec{e}_u; \quad \frac{\partial x}{\partial v} \vec{i}_x + \frac{\partial y}{\partial v} \vec{i}_y = h_v \vec{e}_v \quad (2.11)$$

та помножити скалярно на  $\vec{i}_x, \vec{i}_y$ , то отримуємо вираз для кутів  $\vec{e}_i \vec{i}_k$  між осями криволінійних ( $\vec{e}_u, \vec{e}_v$ ) та декартових ( $\vec{i}_x, \vec{i}_y$ ) координат (рис. 2.3(a)), де  $i = u, v, k = x, y$  відповідно.

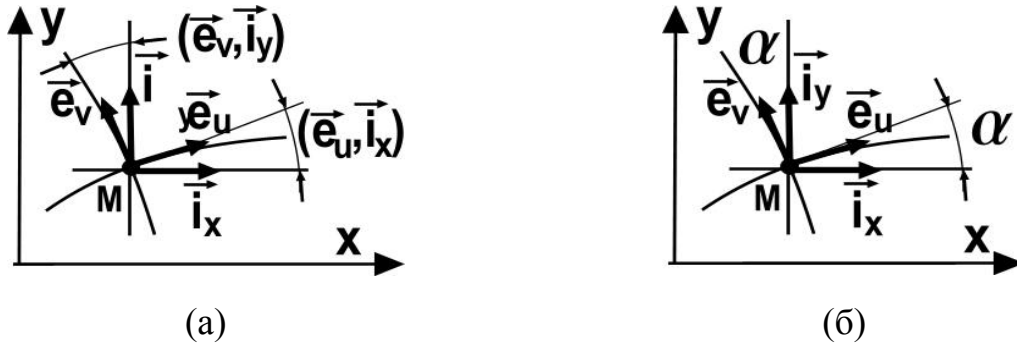


Рис. 2.3. Поворот координатних осей при переході до криволінійних координат (а) – у загальному випадку; (б) – у випадку прямокутних криволінійних координат

Співвідношення (2.11) в термінах напрямних косинусів кутів переписуються у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{e}_u &= \vec{i}_x \cos(\vec{e}_u \vec{i}_x) + \vec{i}_y \cos(\vec{e}_u \vec{i}_y); & \vec{e}_v &= \vec{i}_x \cos(\vec{e}_v \vec{i}_x) + \vec{i}_y \cos(\vec{e}_v \vec{i}_y); \\ \vec{i}_x &= \vec{e}_u \cos(\vec{e}_u \vec{i}_x) + \vec{e}_v \cos(\vec{e}_v \vec{i}_x); & \vec{i}_y &= \vec{e}_u \cos(\vec{e}_u \vec{i}_y) + \vec{e}_v \cos(\vec{e}_v \vec{i}_y), \end{aligned} \quad (2.12)$$

де

$$\begin{aligned} \cos(\vec{e}_u, \vec{i}_x) &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u}; & \cos(\vec{e}_u, \vec{i}_y) &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u}; \\ \cos(\vec{e}_v, \vec{i}_x) &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v}; & \cos(\vec{e}_v, \vec{i}_y) &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Зауважимо, що одиничні вектори обрані в напрямку зростанням відповідних координат. Тому в наведеному на рис. 2.3 прикладі похідна  $\partial x / \partial v < 0$ .

У випадку ортогональних криволінійних координат співвідношення (2.12), (2.13) визначаються одним кутом повороту системи координат  $\alpha = \arccos(\vec{e}_u, \vec{i}_x)$  (рис. 2.3б). При цьому, як видно з (2.13)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{h_u}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{h_v}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u}. \quad (2.14)$$

Знайдемо в криволінійних координатах довжину лінійного елемента на координатній площині (диференціал довжини дуги між точками  $M$  та  $M'$  на рис. 2.2), яка дорівнює  $dl^2 = (d\vec{r}, d\vec{r}) = dx^2 + dy^2$  в декартових координатах. Використовуючи співвідношення (2.4) для  $dx, dy$  довжину лінійного елемента легко представити у вигляді

$$dl^2 = g_{ik} dq_i dq_k. \quad (2.15)$$

Тут  $i, k = 1, 2$  (або  $u, v$ ),  $\vec{q} = (q_1, q_2) = (u, v)$ ,  $g_{ik}$  — фундаментальний метричний тензор з такими компонентами

$$g_{uu} = h_u^2; \quad g_{vv} = h_v^2; \quad g_{uv} = g_{vu} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2.16)$$

За допомогою формул (2.13) недиагональні компоненти метричного тензора можна уявити у вигляді

$$g_{uv} = h_u h_v (\vec{e}_u, \vec{e}_v). \quad (2.17)$$

Звідси видно, що у випадку ортогональних координат з  $\vec{e}_u \perp \vec{e}_v$  неіагональні компоненти метричного тензора дорівнюють нулю.

## Задачі до параграфу 2.1

**2.1.1.** Знайдіть умови, за яких криволінійні координати є ортогональними.

**2.1.2.** Якщо уявити декартові координати  $(x, y)$  в комплексному вигляді на комплексній площині  $z = x + iy$ , криволінійні координати  $\vec{q} = (u, v)$  — у комплексній формі  $Z = u + iv$ , а співвідношення (2.1) у вигляді  $Z = F(z)$ , то до яких властивостей криволінійних координат призводить аналітичність функції  $(z)$ ?

**2.1.3.** Декартові координати  $(x, y)$  перетворюються на ортогональні криволінійні координати  $(u, v)$ . Нехай  $(u, v)$  потім перетворюються на нові координати  $(\zeta, \xi)$  заміною  $u = u(\zeta)$ ,  $v = v(\xi)$  так, що кожна з вихід-

них криволінійних координат залежить тільки від однієї з нових координат. Що можна сказати про ортогональність координат  $(\zeta, \xi)$ ?

**2.1.4.** Як виглядає елемент площі в криволінійних прямокутних координатах?

**2.1.5.** Знайти вираз для градієнта функції в прямокутних криволінійних координатах.

**2.1.6.** Знайти вираз для ротора вектора в прямокутних криволінійних координатах.

**2.1.7.** Знайти вираз для дивергенції вектора в прямокутних криволінійних координатах.

**2.1.8.** Виразити зв'язок ортів декартової та криволінійної прямокутної систем координат через кут  $\alpha$  повороту вісі  $u$  щодо вісі  $x$ .

**2.1.9.** Виразити орти декартових координат через криволінійні координати і їхні орти.

**2.1.10.** Знайти зв'язок між похідними  $\partial x/\partial u$ ,  $\partial x/\partial v$ ,  $\partial y/\partial u$ ,  $\partial y/\partial v$  та  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ ,  $\partial v/\partial x$ ,  $\partial v/\partial y$ .

**2.1.11.** Виразити швидкість матеріальної точки в декартових координатах через узагальнені швидкості, що відповідають криволінійним координатам.

**2.1.12.** Обчислити повороти ортів прямокутних криволінійних координат при переміщенні координатної точки уздовж координатних ліній.

**2.1.13.** Знайти вираз для прискорення матеріальної точки в криволінійних координатах.

## 2.2. Плоскі полярні координати

Окремі випадки плоских прямокутних криволінійних координат почнемо розглядати з добре відомих плоских циліндричних (полярних) координат. Полярні координати зручно використовувати під час розв'язання механічних задач про рух матеріальних точок у площині в аксіально- та радіально-симетричних потенціалах. У полярних координатах позиція точки на площині визначається відстанню до неї від початку декартових координат  $\rho$  та кутом повороту  $\varphi$  радіус-вектора точки від декартової вісі  $x$ :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Полярні координати  $(\rho, \varphi)$  змінюються в інтервалах  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Координатними лініями є кола  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  та промені, які виходять з початку координат  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$  (див. рис. 2.4). Обернене перетво-

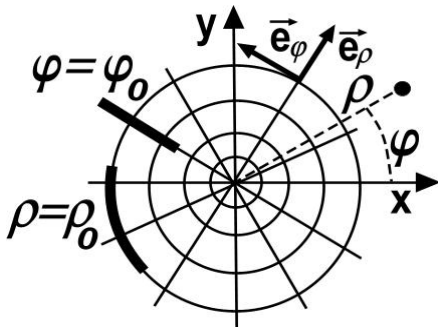


Рис. 2.4. Полярні координати.  
Жирними відрізками ліній  
відзначені координатні лінії

рення від полярних координат до декартових має такий вигляд

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (2.19)$$

Хоча очевидно, що полярні координати є прямокутними покажемо це.

З (2.7), (2.9), (2.16), (2.19) виходить, що коефіцієнти Ламе та компоненти метричного тензора дорівнюють

$$h_\rho = 1; \quad h_\varphi = \rho; \quad g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{\rho\varphi} = 0. \quad (2.20)$$

Квадрат лінійного елемента й елемент площі дорівнюють відповідно

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2; \quad dS = \rho d\rho d\varphi. \quad (2.2.1)$$

## Задачі до параграфа 2.2

**2.2.1.** Як виглядають вирази для  $\text{grad}U$  та  $(\nabla U)^2$  в полярних координатах?

**2.2.2.** Напишіть вираз для  $\text{rot}\vec{A}$  в полярних координатах.

**2.2.3.** Напишіть вираз для  $\text{div}\vec{A}$  в полярних координатах.

**2.2.4.** Знайти рівняння координатних ліній, коефіцієнти Ламе, фундаментальний метричний тензор, лінійний елемент і елемент площі для таких криволінійних координат

$$\begin{cases} u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; \\ v = \text{arctg} \frac{y}{x}. \end{cases}$$

**2.2.5.** Знайти рівняння координатних ліній, коефіцієнти Ламе, фундаментальний метричний тензор, лінійний елемент і елемент площі для криволінійних координат типу

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

**2.2.6.** Знайти вираз для швидкості й прискорення матеріальної точки в плоских полярних координатах.

### 2.3. Плоскі еліптичні координати

Ці криволінійні координати також використовуються в механічних двовимірних задачах, наприклад, у задачі про рух матеріальної частинки на площині в кулонівському полі двох зарядів. При цьому такі координати можна природно зв'язати із двома точками на площині. При фіксованій відстані  $2\sigma$  між ними можна ввести сім'ю еліпсів і співфокусних з ними гіпербол, для яких ці точки є фокусами (рис. 2.5(a))

$$\frac{4x^2}{(r_1 + r_2)^2} + \frac{4y^2}{(r_1 + r_2)^2 - 4\sigma^2} = 1; \quad \frac{4x^2}{(r_2 - r_1)^2} - \frac{4y^2}{4\sigma^2 - (r_2 - r_1)^2} = 1, \quad (2.22)$$

де  $r_1, r_2$  – відстані до двох фокусів. Із цих формул випливають співвідношення між декартовими  $(x, y)$  та плоскими еліптичними  $(r_1, r_2)$  координатами

$$r_1 = \sqrt{(x - \sigma)^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x + \sigma)^2 + y^2}. \quad (2.23)$$

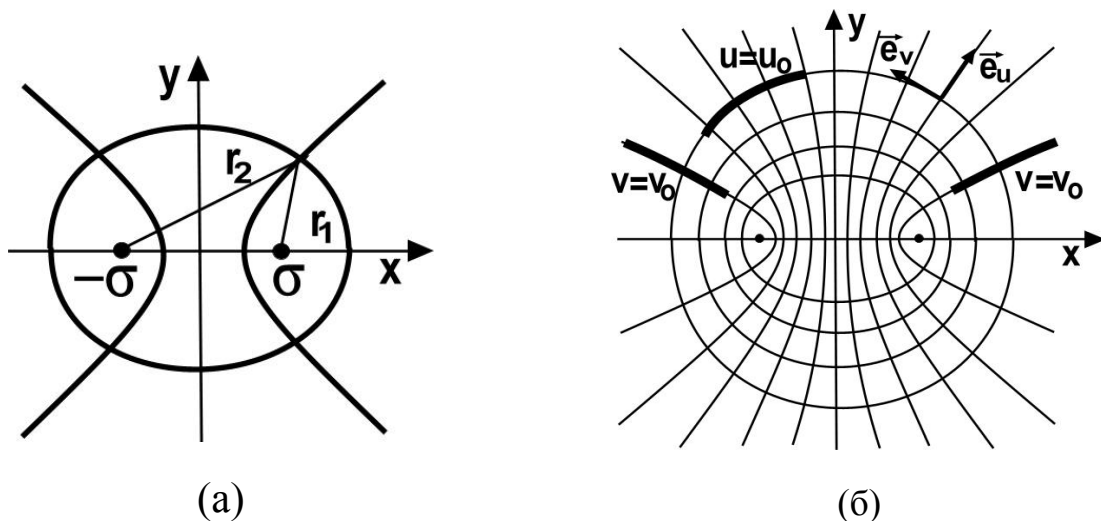


Рис. 2.5. (а) – плоскі еліптичні координати,  
(б) – координатні лінії та орти плоских еліптичних координат

Обернене перетворення

$$x = \frac{1}{4\sigma}(r_2 - r_1)(r_2 + r_1); \quad y = \frac{1}{4\sigma} \sqrt{[4\sigma^2 - (r_2 - r_1)^2][ (r_2 + r_1)^2 - 4\sigma^2 ]}. \quad (2.24)$$

Зазвичай у якості еліптичних координат вибирають трохи інші криволінійні координати

$$u = \frac{r_2 + r_1}{2\sigma}; \quad v = \frac{r_2 - r_1}{2\sigma}. \quad (2.25)$$

В цьому разі зв'язок між координатами виглядає так

$$x = \sigma u v, \quad y = \sigma \sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)}. \quad (2.26)$$

Еліптичні координати  $(u, v)$  змінюються в інтервалах  $u^2 \geq 1, v^2 \leq 1$ .  
Координатні лінії – еліпси

$$\frac{x^2}{\sigma^2 u_0^2} + \frac{y^2}{\sigma^2 u_0^2 - \sigma^2} = 1, \quad u = u_0 = \text{const}$$

та гіперболи

$$\frac{x^2}{\sigma^2 v_0^2} - \frac{y^2}{\sigma^2 - \sigma^2 v_0^2} = 1, \quad v = v_0 = \text{const}$$

ображені на рис. 2.5(б).

З (2.7), (2.9), (2.16), (2.19) виходить, що коефіцієнти Ламе та компоненти метричного тензора дорівнюють

$$h_u = \sigma \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{u^2 - 1}}; \quad h_v = \sigma \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{1 - v^2}}; \quad (2.27)$$

$$g_{uu} = \sigma^2 \frac{u^2 - v^2}{u^2 - 1}; \quad g_{vv} = \sigma^2 \frac{u^2 - v^2}{1 - v^2}; \quad g_{uv} = 0.$$

Квадрат лінійного елемента та елемент площі дорівнюють відповідно

$$dl^2 = \sigma^2 (u^2 - v^2) \left( \frac{du^2}{u^2 - 1} + \frac{dv^2}{1 - v^2} \right); \quad dS = \sigma^2 \frac{(u^2 - v^2) du dv}{\sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)}}. \quad (2.28)$$

### Задачі до параграфу 2.3

**2.3.1.** Як виглядають вирази для  $\text{grad}U$  та  $(\nabla U)^2$  у плоских еліптичних координатах  $(u, v)$ ?

**2.3.2.** Перейти від криволінійних координат  $(u, v)$  до нових координат  $(\xi, \eta)$  перетворенням  $u = \text{ch} \eta, v = \sin \xi$ . Зв'язати ці координати з декартовими координатами.

**2.3.3.** Розглянути граничний перехід від еліптичних координат  $(\xi, \eta)$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

**2.3.4.** Знайти аналітичну функцію, що пов'язує декартові та еліптичні координати як комплексні функції.



## 2.4. Плоскі параболічні координати

Такі криволінійні координати використовуються, наприклад, у задачі про рух матеріальної частинки на площині в центрально-симетричному та додатковому просторово однорідному полі.

Зазвичай плоскі параболічні координати  $(u, v)$  вводяться у такий спосіб

$$\begin{cases} x = \sqrt{uv}; \\ y = \frac{1}{2}(u - v). \end{cases} \quad (2.29)$$

При цьому обернене перетворення виглядає так

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} + y; \quad v = \sqrt{x^2 + y^2} - y. \quad (2.30)$$

З (2.29) випливають залежності  $y = y(x, u = u_0)$  та  $y = y(x, v = v_0)$ , які відповідають різним сім'ям координатних ліній

$$y = \frac{1}{2} \left( u_0 - \frac{x^2}{u_0} \right); \quad y = \frac{1}{2} \left( -v_0 + \frac{x^2}{v_0} \right). \quad (2.31)$$

Ці лінії описують дві сім'ї парабол на площині декартових координат (рис. 2.6).

Параболічні координати  $(u, v)$  змінюються в інтервалах  $0 \leq u < \infty$  та  $0 \leq v < \infty$ . З (2.7), (2.9), (2.16), (2.19) випливає, що коефіцієнти Ламе та компоненти метричного тензора параболічних координат дорівнюють

$$h_u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u+v}{u}}; \quad h_v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u+v}{v}}; \quad (2.32)$$

$$g_{uu} = \frac{u+v}{4u}; \quad g_{vv} = \frac{u+v}{4v}; \quad g_{uv} = 0.$$

Квадрат лінійного елемента й елемент площі дорівнюють відповідно

$$dl^2 = \frac{(u+v)}{4} \left( \frac{du^2}{u} + \frac{dv^2}{v} \right); \quad dS = \frac{(u+v) du dv}{4\sqrt{uv}}. \quad (2.33)$$

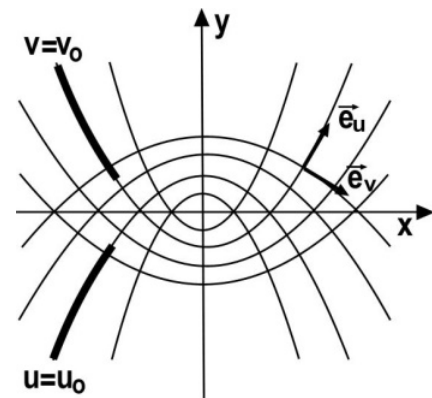


Рис. 2.6. Сім'ї координатних ліній і нормальні орти плоских параболічних координат

## Задачі до параграфу 2.4

**2.4.1.** Як виглядає вираз для  $(\nabla U)^2$  в плоских параболічних координатах  $(u, v)$ ?

**2.4.2.** Розглянути криволінійні координати, пов'язані з декартовими такими співвідношеннями  $\eta = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$ ,  $\xi = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$ .

**2.4.3.** Знайти аналітичну функцію, що зв'язує декартові та параболічні координати як комплексні функції.

## 2.5. Плоскі біполярні координати

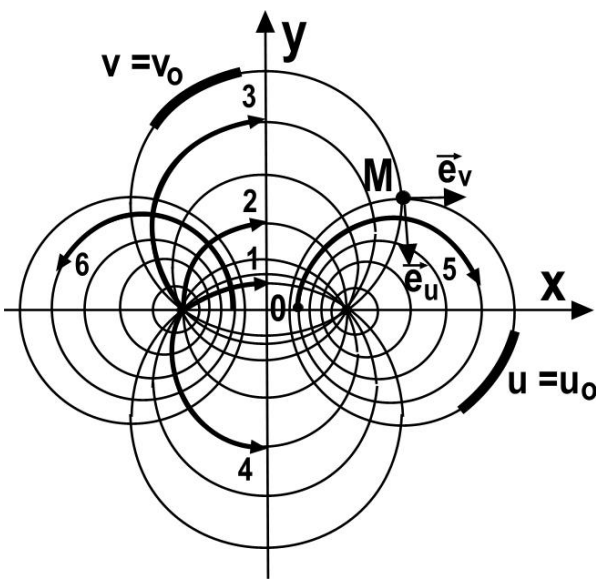


Рис. 2.7. Сім'ї координатних ліній і нормальні орти плоских біполярних координат

у точках  $x = \pm 1$ ,  $y = 0$  (рис. 2.7). Координатними лініями  $v$  є кола з радіусами  $R_v = 1/|\sin v|$  та центрами в точках  $L_v = \pm \text{ctg } v$  на осі  $y$ , які проходять через полюси.

При переміщенні по колу  $u = u_0$  (лінія 5 на рис. 2.7) за годинниковою стрілкою від полюса  $x = 1$ ,  $y = 0$  координата  $v$  зростає від 0 до  $2\pi$ . Під час руху по другому колу координата зростає при переміщенні проти годинникової стрілки (лінія 6 на рис. 2.7). Під час руху по колах  $v = v_0$  від полюса  $x = -1$  до полюса  $x = 1$  координата  $v$  змінюється від  $-\infty$  до  $\infty$ . При цьому відрізок осі  $x$  між полюсами відповідає значенню  $v = 0$ . При  $0 < v < \pi/2$  координатна лінія має вигляд лінії 2, значенню  $v = \pi/2$  відповідає половина кола одиничного радіуса (лінія 2), при  $\pi/2 < v < \pi$  координатні лінії мають вигляд 4, при  $\pi < v < 2\pi$  – вид ліній 5.

Перехід від декартових до плоских біполярних координат описується системою рівнянь

$$\begin{cases} x = \frac{\text{sh } u}{\text{ch } u + \cos v}; \\ y = \frac{\sin v}{\text{ch } u + \cos v}, \end{cases} \quad (2.34)$$

де  $-\infty < u < \infty$ ,  $0 \leq v < 2\pi$ .

## Задачі до параграфа 2.5

**2.5.1.** Як виглядає обернене перетворення від біполярних до декартових координат?

**2.5.2.** Знайти вигляд координатних ліній  $y = y(x)$  при фіксованих значеннях  $u = u_0, v = v_0$ .

**2.5.3.** Знайдіть коефіцієнти Ламе та фундаментальний метричний тензор для біполярних координат.

**2.5.4.** Знайти елемент довжини дуги й елемент площі в біполярних координатах.

## 2.6. Розв'язки та відповіді до розділу 2

**2.1.1.** Одиничні вектори криволінійних координат у декартовій системі мають вигляд

$$\vec{e}_u = \vec{i}_x (\vec{e}_u \vec{i}_x) + \vec{i}_y (\vec{e}_u \vec{i}_y); \quad \vec{e}_v = \vec{i}_x (\vec{e}_v \vec{i}_x) + \vec{i}_y (\vec{e}_v \vec{i}_y).$$

Звідси

$$(\vec{e}_u \vec{e}_v) = (\vec{e}_u \vec{i}_x)(\vec{e}_v \vec{i}_x) + (\vec{e}_u \vec{i}_y)(\vec{e}_v \vec{i}_y).$$

Підставляючи в цей вираз формули (2.13) знаходимо умову ортогональності системи криволінійних координат

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = g_{uv} = 0,$$

тобто метричний тензор повинен бути діагональним.

**2.1.2.** Якщо функція  $F(z)$  є аналітичною, то вона задовольняє умовам Коші–Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Оскільки функція обернена аналітичній функції також аналітична, то й для неї задовольняються умови Коші–Рімана

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial v}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Із цих двох рівнянь випливає умова ортогональності криволінійних координат  $g_{uv} = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = g_{uv} = 0.$$

Таким чином, аналітичній функції перетворення координат  $Z = F(z)$  відповідає перехід від декартових до прямокутних криволінійних координат.

**2.1.3.** Підставляючи у формулу

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = g_{uv} = 0$$

співвідношення  $\partial/\partial u = (d\zeta/du)\partial/\partial\zeta$ ,  $\partial/\partial v = (d\xi/dv)\partial/\partial\xi$  отримуємо

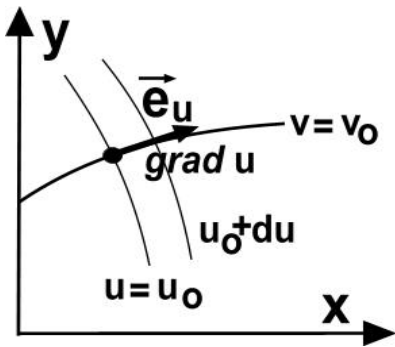


Рис. 2.8 Орієнтація координатних ліній і градієнтів криволінійних координат

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0.$$

Так, нові криволінійні координати  $(\zeta, \xi)$  також є прямокутними.

**2.1.4.** З (2.4) – (2.6) виходить, що

$$d\vec{r} = h_u du \vec{e}_u + h_v dv \vec{e}_v,$$

тобто величини  $h_u du$  та  $h_v dv$  у прямокутній системі координат являють собою сторони нескінченно малого паралелепіпеда із площею

$$dS = dx dy = h_u h_v du dv.$$

**2.1.5.** З рис. 2.8 видно, що  $\text{grad}(u)$  спрямований уздовж координатної лінії  $v$ .

Отже,  $\text{grad}(u) = H_u \vec{e}_u$ , де  $H_u = |\text{grad}(u)| = \sqrt{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2}$ . Так як

$$du = \left( \frac{du}{d\vec{r}} \right) d\vec{r} = (\text{grad}(u), d\vec{r}) = \left( \text{grad}(u), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) du + \left( \text{grad}(u), \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) dv,$$

то за допомогою (2.6)

$$\left( \text{grad}(u), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) = H_u h_u = 1.$$

Звідси виходить, що градієнт довільної скалярної функції  $\varphi$  в прямокутних криволінійних координатах має вигляд

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \text{grad } v$$

або

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \vec{e}_v.$$

**2.1.6.** У розглянутому двовимірному випадку вектор  $\vec{A} = \vec{i}_x A_x + \vec{i}_y A_y$  має тільки дві компоненти, і його ротор, спрямований у перпендикулярному площині  $(x, y)$  напрямку дорівнює

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{i}_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Для знаходження виразу для ротора вектора  $\vec{A} = \vec{e}_u A_u + \vec{e}_v A_v$  в криволінійних координатах необхідно скористатися визначенням ротора, яке не залежить від системи координат

$$\text{rot } \vec{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} d\vec{r}}{S},$$

де інтегрування відбувається по нескінченно малому замкненому контуру  $C$ , який охоплює площу  $dS$ . У цьому випадку зручно вибрати контур, пов'язаний із криволінійними координатами зображений на рис. 2.9.

З формули (2.6) виходить, що при переміщенні уздовж координатної лінії  $u$  зміна радіус-вектора дорівнює  $d\vec{r}_u = \vec{e}_u h_u du$

(відрізок 1 на рис. 2.9)  $\vec{A} d\vec{r}_u = A_u h_u du$ , а уздовж лінії  $v$  (відрізок 4 на рис. 2.9) маємо  $d\vec{r}_v = -\vec{e}_v h_v dv$  та  $\vec{A} d\vec{r}_v = -A_v h_v dv$ . Відповідно, на відрізках 2 і 3

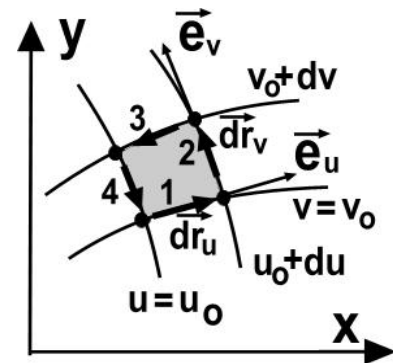


Рис. 2.9. Контур інтегрування при визначенні операції  $\text{rot } \vec{A}$  в криволінійних координатах

$$\vec{A} d\vec{r}_v = \left[ A_v h_v + \frac{\partial(A_v h_v)}{\partial u} du \right] dv, \quad \vec{A} d\vec{r}_u = - \left( A_u h_u + \frac{\partial(A_u h_u)}{\partial v} dv \right) du.$$

Підсумовуючи результати по всьому контуру  $C$  з урахуванням того, що площа дорівнює  $dS = h_u h_v du dv$  знаходимо

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_u A_u) \right].$$

**2.1.7.** Щоб отримати дивергенцію вектора  $\vec{A} = \vec{e}_u A_u + \vec{e}_v A_v$  в криволінійних координатах, необхідно скористатися визначенням дивергенції, яке не залежить від системи координат

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint A_n dl}{S},$$

де інтегрування відбувається по нескінченно малому замкненому контуру  $C$ , який охоплює площу  $dS$ . У цій формулі  $A_n$  – проекція вектора на зовнішню нормаль до контура інтегрування, а  $l$  – скалярна координата уздовж контура. Зручно вибрати контур, пов'язаний із криволінійними координатами, зображений на рис. 2.9. З (2.6) випливає, що при переміщенні уздовж координатної лінії  $u$  (відізок 1 на рис. 2.9) зміна радіус-вектора дорівнює  $d\vec{r}_u = \vec{e}_u h_u du$ , а  $dl_u = h_u du$ . При цьому нормальна компонента вектора  $\vec{A}$  дорівнює  $A_n = -A_v$ , і внесок в інтеграл від відізка 1 становить  $-h_u A_v du$ . Обчислюючи внесок у повний інтеграл всіх відізків контура як у задачі 2.1.5 отримуємо результат

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u A_v) \right].$$

**2.1.8.** Скориставшись формулами (2.12) отримаємо

$$\vec{e}_u = \vec{i}_x \cos \alpha + \vec{i}_y \sin \alpha; \quad \vec{e}_v = -\vec{i}_x \sin \alpha + \vec{i}_y \cos \alpha;$$

$$\vec{i}_x = \vec{e}_u \cos \alpha - \vec{e}_v \sin \alpha; \quad \vec{i}_y = \vec{e}_u \sin \alpha + \vec{e}_v \cos \alpha.$$

**2.1.9.** Проекції декартових ортів на орти криволінійної системи мають вигляд

$$\vec{i}_x = \vec{e}_u \cos(\vec{e}_u \vec{i}_x) + \vec{e}_v \cos(\vec{e}_v \vec{i}_x); \quad \vec{i}_y = \vec{e}_u \cos(\vec{e}_u \vec{i}_y) + \vec{e}_v \cos(\vec{e}_v \vec{i}_y).$$

Скориставшись формулами (2.9) отримаємо

$$\vec{i}_x = \frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} \vec{e}_v; \quad \vec{i}_y = \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v} \vec{e}_v.$$

**2.1.10.** Якщо розглянути координату  $u(x, y)$  як скалярну функцію вектора  $\vec{r}$ , то, як видно з рис. 2.8, градієнт цієї функції  $\text{grad}(u)$  спрямований перпендикулярно координатній лінії  $v$  з  $u = u_0 = \text{const}$ , тобто у випадку ортогональних координат уздовж орта  $\vec{e}_u$ . Оскільки

$$|\text{grad}(u)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = H_u,$$

то

$$\text{grad}(u) = H_u \vec{e}_u.$$

Скористаємося формулою (2.10). Помножимо її скалярно на  $\text{grad}(u)$ , щоб отримати

$$\left(\vec{\nabla}u \cdot d\vec{r}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du = H_u \vec{e}_u h_u du \vec{e}_u = H_u h_u du.$$

Отже

$$H_u = \frac{1}{h_u}.$$

Порівнюючи вирази для  $\text{grad}(u)$  з формулою (2.10) знаходимо, що

$$\frac{1}{h_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{1}{H_u} \vec{\nabla}u.$$

Записуючи це співвідношення в компонентах з урахуванням того, що  $H_u = 1/h_u$  знаходимо наступний зв'язок похідних

$$\frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} = h_u \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} = h_u \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{1}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} = h_v \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v} = h_v \frac{\partial v}{\partial y}.$$

**2.1.11.** Необхідно скористатися формулою (2.10), з якої можна отримати вираз для швидкості матеріальної точки

$$\vec{V} = h_u \dot{u} \vec{e}_u + h_v \dot{v} \vec{e}_v. \quad (2.35)$$

**2.1.12.** Обертання одиничного вектора  $\vec{e}_u$  при зміні координат на  $\delta u$  та  $\delta v$  зображені на рис. 2.10. Скориставшись формулами із задачі 2.1.8 знаходимо, що при переміщенні точки  $M$  уздовж координатної лінії  $v$  на величину  $\delta v$  в точку  $M_v$  одиничний вектор  $\vec{e}_u$  змінюється на

$$\delta \vec{e}_u = \left( -\vec{i}_x \sin \alpha + \vec{i}_y \cos \alpha \right) \frac{\partial \alpha}{\partial v} \delta v = \vec{e}_v \frac{\partial \alpha}{\partial v} \delta v,$$

де функція  $K = (1/h_v)(\partial \alpha / \partial v)$  визначає кривизну координатної лінії  $v$ . З урахуванням визначення кута  $\alpha = \arccos[(\partial x / \partial u) / h_u]$ , формули (2.7) для коефіцієнта Ламе  $h_u$ , зв'язків (2.14) між похідними від декартових координат знаходимо вирази для ортів криволінійних координат через коефіцієнти Ламе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial v} &= -\frac{h_u}{(\partial y / \partial u)} \left[ \frac{1}{h_u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{1}{h^3} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] = \\ &= \frac{h_u}{(\partial y / \partial u)} \frac{1}{h_u^3} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{h_u^2} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right] = \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial v} \right] = \frac{1}{h_u} \frac{\partial h_v}{\partial u}. \end{aligned}$$

Аналогічно обчислюється й похідна  $\partial \alpha / \partial u$ . Так, повороти ортів криволінійних координат описуються формулами

$$\delta \vec{e}_u = \vec{e}_v \left( \frac{1}{h_u} \frac{\partial h_v}{\partial u} \delta v - \frac{1}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \delta u \right); \quad \delta \vec{e}_v = -\vec{e}_u \left( \frac{1}{h_u} \frac{\partial h_v}{\partial u} \delta v - \frac{1}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \delta u \right).$$

Із цих формул випливають вирази для швидкостей поворотів ортів

$$\dot{\vec{e}}_u = \vec{e}_v \left( \frac{1}{h_u} \frac{\partial h_v}{\partial u} \dot{v} - \frac{1}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \dot{u} \right); \quad \dot{\vec{e}}_v = -\vec{e}_u \left( \frac{1}{h_u} \frac{\partial h_v}{\partial u} \dot{v} - \frac{1}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \dot{u} \right).$$

**2.1.13.** Скористаємося формулою (2.35) із задачі 2.1.11 та знайдемо похідну по часу з урахуванням того, що при русі змінюються напрямки ортів координат. У результаті маємо

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \left( \dot{h}_u \dot{u} + h_u \ddot{u} - h_v \dot{v} f \right) \vec{e}_u + \left( \dot{h}_v \dot{v} + h_v \ddot{v} + h_u \dot{u} f \right) \vec{e}_v,$$

де

$$f = \left( \frac{1}{h_u} \frac{\partial h_v}{\partial u} \dot{v} - \frac{1}{h_v} \frac{\partial h_u}{\partial v} \dot{u} \right).$$

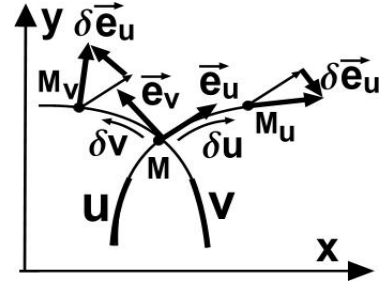


Рис. 2.10. Обертання ортів криволінійних координат при переміщенні координатної точки уздовж координатних ліній



$$2.2.1. \text{ Відповідь: } \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi; \quad (\vec{\nabla} U)^2 = \left( \frac{\partial U}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)^2.$$

$$2.2.2. \text{ Відповідь: } \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}.$$

$$2.2.3. \text{ Відповідь: } \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

2.2.4. Криволінійні координати наведеного типу також є полярними. Вони пов'язані з розглянутими в цьому розділі полярними координатами за допомогою простого перетворення

$$u = u(\rho) = \ln \rho; \quad \rho = \exp(u);$$

$$v = v(\varphi) = \varphi.$$

Обернене перетворення для цих координат таке:

$$x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v.$$

Отже, комплексна функція перетворення від декартових координат до цих полярних координат має вигляд аналітичної функції

$$u + i v = \ln(x + i y).$$

Координатні лінії  $u = u_0 = \text{const}$  – кола із центром на початку координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = e^{u_0} = \text{const},$$

а координатні лінії  $v = v_0 = \text{const}$  – прямі, що виходять із початку координат

$$y = (\operatorname{tg} v_0) \cdot x; \quad \varphi = v_0.$$

Фундаментальний метричний тензор і коефіцієнти Ламе мають вигляд

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} e^{2u} & 0 \\ 0 & e^{2u} \end{pmatrix}; \quad h_u = h_v = e^u,$$

а квадрат елемента довжини та елемент площі дорівнюють відповідно

$$dl^2 = e^{2u} (du^2 + dv^2); \quad dS = e^{2u} du dv.$$

**2.2.5.** Ці криволінійні координати також є полярними. Перехід до них від звичайних полярних координат здійснюється заміною змінних

$$u = u(\rho) = \rho; \quad v = v(\varphi) = \cos \varphi.$$

Оскільки кожна нова координата залежить тільки від однієї старої координати відразу можна сказати, що розглянуті координати є прямокутними. Координатні лінії  $u = u_0 = \text{const}$  – кола із центром у початку координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = u_0 = \text{const},$$

а координатні лінії  $v = v_0 = \text{const}$  – прямі, що виходять із початку координат

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1 - v_0^2}{v_0^2}}.$$

Обернене перетворення від цих криволінійних координат до декартових координат запишеться так

$$x = u v, \quad y = u \sqrt{1 - v^2}.$$

Фундаментальний метричний тензор і коефіцієнти Ламе мають вигляд

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{u^2}{1 - v^2} \end{pmatrix}; \quad h_u = 1; \quad h_v = \frac{u}{\sqrt{1 - v^2}},$$

а квадрат елемента довжини й елемент площі дорівнюють відповідно

$$dl^2 = du^2 + \frac{u^2}{1 - v^2} dv^2; \quad dS = \frac{u}{\sqrt{1 - v^2}} du dv.$$

**2.2.6.** Скориставшись результатами отриманими в задачах 2.2.11 і 2.2.13 та замінивши у відповідних формулах  $u \rightarrow \rho$ ,  $v \rightarrow \varphi$  знаходимо

$$\vec{V} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi; \quad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi.$$

**2.3.1.** Відповідь

$$\text{grad}U = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{\sigma \sqrt{u^2 - v^2}} \frac{\partial U}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{\sqrt{1 - v^2}}{\sigma \sqrt{u^2 - v^2}} \frac{\partial U}{\partial v} \vec{e}_v;$$

$$(\vec{\nabla}U)^2 = \frac{1}{\sigma^2(u^2 - v^2)} \left( (u^2 - 1) \left( \frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + (1 - v^2) \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 \right).$$

**2.3.2.** З виду перетворення очевидно, що нові координати є прямокутними. З формул (2.26) випливає зв'язок

$$x = \sigma \sin \xi \operatorname{ch} \eta; \quad y = \sigma \cos \xi \operatorname{sh} \eta.$$

Обернені перетворення

$$\begin{aligned} \xi &= \arcsin \left[ \frac{1}{2\sigma} \left( \sqrt{(x + \sigma)^2 + y^2} - \sqrt{(x - \sigma)^2 + y^2} \right) \right]; \\ \eta &= \operatorname{Arch} \left[ \frac{1}{2\sigma} \left( \sqrt{(x + \sigma)^2 + y^2} + \sqrt{(x - \sigma)^2 + y^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Звідси виходить, що координатні лінії  $\eta$  – еліпси, а  $\xi$  – гіперболи, які задаються формулами

$$\frac{x^2}{\sigma^2 \operatorname{ch}^2 \eta} + \frac{y^2}{\sigma^2 \operatorname{sh}^2 \eta} = 1; \quad \frac{x^2}{\sigma^2 \sin^2 \xi} - \frac{y^2}{\sigma^2 \cos^2 \xi} = 1 \quad (2.37)$$

відповідно.

**2.3.3.** Зі співвідношень (2.36) в граничному випадку  $\sigma \rightarrow 0$  маємо такі границі  $\sigma \operatorname{ch} \eta \rightarrow \rho$ ,  $\sin \xi \rightarrow \cos \varphi$ . Тому з формул (2.37) в цьому випадку виходить, що

$$x^2 + y^2 = \rho^2; \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Це означає, що еліптичні координати в розглянутому граничному випадку перетворюються в полярні координати.

**2.3.4.** Можна скористатися записом еліптичних координат у вигляді

$$x = \sigma \sin \xi \operatorname{ch} \eta; \quad y = \sigma \cos \xi \operatorname{sh} \eta.$$

Звідси випливає, що  $x + iy = \sigma \sin(\xi + i\eta)$ .

**2.4.1.** Відповідь: 
$$(\vec{\nabla}U)^2 = \frac{4}{u + v} \left[ u \left( \frac{\partial U}{\partial u} \right)^2 + v \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)^2 \right].$$

**2.4.2.** Ці координати пов'язані з розглянутими в § 2.4 перетворенням  $\eta = \sqrt{v}$ ,  $\xi = \sqrt{u}$  і також є параболічними, оскільки координатні лінії опи-

суються рівняннями парабол. Система цих ліній має такий же вигляд, як і на рис. 2.6

$$x = \frac{1}{2} \left( \eta_0^2 - \frac{y^2}{\eta_0^2} \right); \quad x = \frac{1}{2} \left( -\xi_0^2 + \frac{y^2}{\xi_0^2} \right).$$

Обернене перетворення описується формулами

$$x = \frac{\eta^2 - \xi^2}{2}; \quad y = \eta \xi. \quad (2.38)$$

Коефіцієнти Ламе та компоненти метричного тензора розглянутих координат дорівнюють

$$h_\eta = h_\xi = \sqrt{\eta^2 + \xi^2};$$

$$g_{\eta\eta} = g_{\xi\xi} = \eta^2 + \xi^2; \quad g_{\eta\xi} = 0.$$

**2.4.3.** Можна скористатися зв'язком декартових і параболічних координат (2.38). Із цих формул очевидно, що  $\eta + i\xi = \sqrt{2} \sqrt{x + iy}$ .

**2.5.1.** Перехід від плоских біполярних координат до декартових координат має вигляд

$$u = \operatorname{Arcth} \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}; \quad v = \operatorname{arctg} \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}.$$

**2.5.2.** У декартових координатах координатні лінії описуються такими рівняннями

$$(x \pm \operatorname{cth} u_0)^2 + y^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u_0}; \quad (y \pm \operatorname{ctg} v_0)^2 + x^2 = \frac{1}{\sin^2 v_0}.$$

**2.5.3.** Коефіцієнти Ламе та компоненти метричного тензору мають вигляд

$$h_u = h_v = \frac{1}{\operatorname{ch} u + \cos v}; \quad g_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2} \end{pmatrix}.$$

**2.5.4.** Елемент довжини дуги й елемент площі в біполярних координатах дорівнюють відповідно

$$dl^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}; \quad dS = \frac{dudv}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}.$$

---

---

## ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНІКА

*Лагранж довів, що найрізноманітніші наслідки, що відносяться до руху планет, можуть бути виведені з однієї основної формули. Ця велика робота перетворюється у свого роду математичну поему.*

*У. Р. Гамільтон, Вибрані твори*

### 3.1. Основні принципи лагранжевої механіки

У першому розділі був розглянутий підхід Ньютона до розв'язання задач механіки системи матеріальних точок. Розв'язання рівнянь Ньютона вимагає знання всіх зовнішніх сил, прикладених до матеріальної системи. У низці застосувань визначити їх досить складно. Ми зіштовхнулися із цим під час розгляду систем зі зв'язками, для яких виникла необхідність обліку сил реакції. Задача лагранжевої механіки – виключити ці сили з рівнянь руху. Рівняння Ньютона, як і рівняння Лагранжа, деталізують механічний рух розв'язанням диференціальних рівнянь, але рівняння Лагранжа крім того впливають із деякого інтегрального принципу (принципу Гамільтона), перевага якого полягає в тому, що він може бути застосований і до немеханічних систем, до яких закони Ньютона незастосовні.

Лагранж розв'язав задачу пошуку мінімуму функціонала

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (3.1)$$

при фіксованих значеннях  $q(t_1) = q_1$ ,  $q(t_2) = q_2$ . Стосовно до проблем механіки ця задача формулюється як *принцип найменшої дії*. У загальному випадку принцип був запропонований П. Мопертюї, який сформулював його так: «Кількість дії, необхідна для того, щоб зробити деяку зміну в природі, є найменшим можливим». Дією в (3.1) є величина  $S$ , а функція  $L$  в інтегралі називається *функцією Лагранжа*. Із принципу найменшої дії

впливають *рівняння Лагранжа* для узагальнених координат, що у загальному випадку  $n$  ступенів свободи мають такий вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Розв'язки цих рівнянь описують динаміку системи та визначаються виглядом функції Лагранжа. У декартових координатах вид цієї функції отримуємо з основних принципів механіки – однорідності та ізотропії простору та часу, принципу відносності руху, принципу детермінізму, узгодження з рівняннями Ньютона –

$$L(\dot{\vec{r}}_i, \vec{r}_i, t) = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_i, t), \quad (3.3)$$

де  $T$  – кінетична енергія,  $U$  – потенціальна енергія. Оскільки принцип найменшої дії – це інтегральний принцип, то у виразі для дії можна робити будь-які заміни змінних і враховувати можливі зв'язки. Водночас рівняння (3.2) в будь-яких узагальнених координатах будуть правильно описувати ньютонівську динаміку системи. При переході від декартових координат  $\vec{r}_i$  до узагальнених  $q_s$  (кількість яких при урахуванні зв'язків може бути менше, ніж  $3n$ ) знаходимо функцію Лагранжа в загальному випадку

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_{ij} \frac{m_{ij}(q)}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q, t). \quad (3.4)$$

### 3.2. Інтегрування рівнянь руху

Вибір найбільш зручної координатної системи може значно спростити вигляд функції Лагранжа та полегшити рішення задачі. Цей вибір здійснюється з огляду на два фактори: симетрію зв'язків, накладену на матеріальні точки, та симетрію зовнішніх полів. Так, під час руху точки по поверхні циліндра природно розглядати рух у циліндричних координатах. Частинка, яка рухається по поверхні конуса або сфери найбільш природно описується в сферичних координатах.

Розв'язання рівнянь Лагранжа спрощуються у таких випадках.

1. При накладанні зв'язку в системі зникає один зі ступенів свободи і лагранжіан містить на одну узагальнену координату менше, ніж у вихідній системі.

Розглянемо задачу про коливання плоского математичного маятника. У § 1.12 вона була розглянута в ньютонівському підході. Було отримано рівняння (1.44) у циліндричних координатах. У підході Лагранжа ураху-

вання зв'язку (нерозтяжної нитки) можна провести відразу у виразі для функції Лагранжа. У декартових координатах вона має вигляд

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \quad (3.5)$$

зі зв'язком  $x^2 + y^2 = l^2$ .

В полярних координатах  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = -r \cos \varphi$  при урахуванні зв'язку  $r = l$  функція Лагранжа приймає вигляд

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \varphi = \frac{m}{2}l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi. \quad (3.6)$$

При цьому рівняння Лагранжа (3.2) для узагальненої координати  $\varphi$  отримає вигляд (1.44)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (3.7)$$

Продемонструємо побудову функції Лагранжа в системі зі зв'язком на більш складному прикладі для частинки маси  $m$ , яка рухається по поверхні обертання (рис. 3.1), заданій у вигляді  $\rho = \rho(z)$  у полі тяжіння Землі. У цьому прикладі симетрія полягає в можливості повороту системи координат на довільний кут навколо напрямку дії сили тяжіння.

В якості незалежних змінних виберемо координати  $z$  та  $\varphi$  циліндричної системи координат. Функція Лагранжа з урахуванням зв'язку  $\rho = \rho(z)$  має вигляд

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \frac{m}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 + 1 \right] \dot{z}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right\} - mgz. \quad (3.8)$$

2. Інша можливість спрощення лагранжіану пов'язана з тим, що дві функції Лагранжа, які відрізняються тільки на повну похідну за часом від довільної функції координат та часу (але не швидкості)  $\Phi = \Phi(q, t)$  призводять до співпадаючих рівнянь руху. Це ствердження є наслідком того, що згідно з визначенням функції дії (3.1)  $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \text{const}$ , тому варіація  $\delta S$  не залежить від наявності у функції Лагранжа доданку  $\Phi = \Phi(q, t)$ .

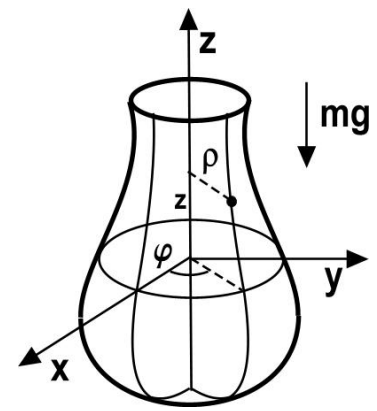


Рис. 3.1. Рух частинки в полі сили тяжіння по поверхні обертання навколо напрямку цієї сили

Для прикладу розглянемо функцію Лагранжа

$$L = \frac{(\dot{q} + q)^2}{2}.$$

Виділимо в цьому виразі повну похідну по часу

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + 2q\dot{q} + q^2) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2}\right)$$

В цьому випадку це  $\Phi = q^2/2$ . При складанні рівняння руху можна використовувати нову функцію Лагранжа

$$\tilde{L} = \frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2},$$

відкинувши доданок  $q\dot{q} = d\Phi/dt$ . За допомогою прямого обчислення легко переконатися, що функції  $L$  та  $\tilde{L}$  приведуть до одних і тих же рівнянь руху.

3. Дослідження динамічної системи спрощується, якщо якась зі змінних (але не узагальнена швидкість  $\dot{q}$ ) відсутня в лагранжіані. У цьому разі мова йде не про наявність зв'язку, а про симетрію потенціальної енергії. Відсутня в лагранжіані змінна називається *циклічною*. Рівняння Лагранжа для циклічної змінної має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (3.9)$$

З (3.9) виходить, що величина

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (3.10)$$

яка називається узагальненим імпульсом, зберігається. Отже, якщо координата  $q_i$  не входить явно у функцію Лагранжа, то виконується закон збереження відповідного їй узагальненого імпульсу. Наприклад, збереження імпульсу в декартових координатах виходить з однорідності простору та незалежності потенціальної енергії від координати.

Якщо функція Лагранжа не залежить від часу (тобто час є «циклічною змінною») то така симетрія призводить до закону збереження енергії

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \quad (3.11)$$

Як приклад розглянемо систему, яка описується лагранжіаном

$$L = x\dot{x}^2 + y\dot{y}^2 - x^2. \quad (3.12)$$



У цьому випадку координата  $y$  є циклічною, тому відповідний узагальнений імпульс

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2\dot{y} = \text{const} \quad (3.13)$$

зберігається. Оскільки час не входить явно у функцію Лагранжа, то зберігається також енергія

$$E = \frac{p_y^2}{4} + x\dot{x}^2 + x^2. \quad (3.14)$$

### Задачі до параграфу 3.2

**3.2.1.** Дві точкові маси  $m_1, m_2$ , які зв'язані пружиною із жорсткістю  $k$ , можуть рухатися без тертя уздовж напрямних по сторонах прямого кута Оху в поле сили тяжіння. Довжина пружини в ненапруженому стані дорівнює  $l_0$  (рис. 3.2). Скласти функцію Лагранжа розглянутої системи.

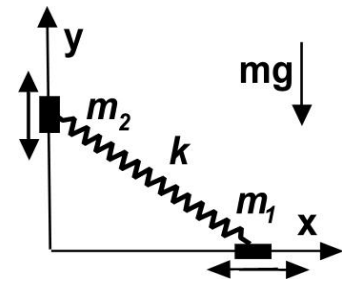


Рис. 3.2. Приклад двовимірного руху двох мас зі зв'язком

**3.2.2.** Для плоского руху матеріальної точки в силовому полі з потенціалом  $U(x, y)$  знайти лагранжіан у координатах  $u, v$  пов'язаних з декартовими координатами через рівняння  $x = \sqrt{uv}$ ,  $y = (u - v)/2$ . Це плоскі параболічні координати, розглянуті в § 2.7 (див. (2.29)).

**3.2.3.** Довжина нитки математичного маятника змінюється за відомим законом  $l = l(t)$ . Записати лагранжіан і рівняння руху маятника.

**3.2.4.** Точка з масою  $m$  може рухатися в поле тяжіння без тертя по гладкому еліптичному параболоїду  $z = ax^2 + by^2$ ,  $a > 0, b > 0$ . Вісь Oz спрямована вертикально вгору. Скласти рівняння Лагранжа.

**3.2.5.** Функція Лагранжа вільної релятивістської частинки (тобто частинки, швидкість якої не є малою в порівнянні зі швидкістю світла  $c$ ) з масою  $m$  має вигляд

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}.$$

Скласти рівняння руху частинки і знайти їхні розв'язки.

**3.2.6.** Знайти закон руху точки, обумовлений лагранжіаном

$$L = t \sqrt{1 + \dot{x}^2}$$

при початкових умовах  $x(t_0) = x_0$ ,  $v(t_0) = v_0$ .

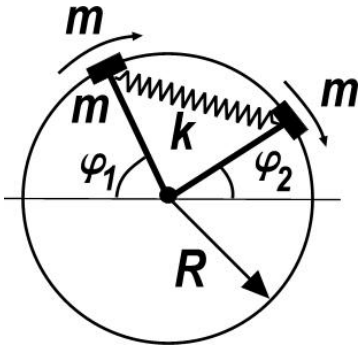


Рис. 3.3. Рух двох зв'язаних мас по колу

**3.2.7.** Частинка з масою  $m$  може рухатися без тертя в поле тяжіння  $U = mgy$  у вертикальній площині  $(x, y)$  уздовж кривої  $y = F(x)$ . Скласти рівняння Лагранжа та знайти його перший інтеграл.

**3.2.8.** Дві однакові точкові маси  $m$ , які зв'язані пружиною із жорсткістю  $k$ , можуть рухатися без тертя по нерухливому кільцю радіуса  $R$  (рис. 3.3). Довжина вільної пружини дорівнює  $l_0$ . Скласти рівняння Лагранжа. Використовуючи координати  $\mathcal{Q}_1 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$ ,  $\mathcal{Q}_2 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$  знайти закон руху у квадратурах.

### 3.3. Застосування законів збереження при інтегруванні рівнянь руху

У цьому розділі розглянуто приклади використання законів збереження енергії, імпульсу й кутового моменту при розв'язанні динамічних задач лагранжевої механіки.

#### 3.3.1. Закон збереження енергії

Якщо час не входить явно в лагранжیان, то зберігається енергія системи, яка знаходиться за формулою (3.11). Для системи з одним ступенем свободи маємо  $E(x, \dot{x}) = \dot{x} \partial L / \partial \dot{x} - L$ . У разі, коли із закону збереження енергії  $E(x, \dot{x}) = E$  вдається в явному вигляді знайти залежність  $\dot{x} = f(x, E)$ , рішення задачі отримуємо у вигляді

$$t - t_0 = \int f^{-1}(x, E) dx, \quad (3.15)$$

де енергія та адитивна стала знаходяться із початкових умов  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ .

#### Задачі до параграфа 3.3.1

В задачах 3.3.1.1 – 3.3.1.9 треба проінтегрувати динамічні рівняння систем із заданою функцією Лагранжа та початковими умовами

$$3.3.1.1. L = \dot{x}^2 - \frac{1}{x^2}; \quad \dot{x}_0 = 0, x_0 = 1.$$

$$3.3.1.2. L = \dot{x}^2 + \operatorname{tg}^2 x; \quad \dot{x}_0 = 2, x_0 = 0.$$

$$3.3.1.3. L = \dot{x}^2 + e^x; \quad \dot{x}_0 = 2, x_0 = 0.$$

$$3.3.1.4. L = \dot{x}^2 - \frac{1}{x}; \quad \dot{x}_0 = 0, x_0 = 1.$$

$$3.3.1.5. L = \frac{\dot{x}^2}{x} - x; \quad \dot{x}_0 = 1, x_0 = 1.$$

$$3.3.1.6. L = \frac{\dot{x}^2}{x} + x + \frac{1}{x}; \quad E = -3, x_0 = 0.$$

$$3.3.1.7. L = \frac{\dot{x}^2 + x\dot{x} - 1}{x}; \quad \dot{x}_0 = 0, x_0 = 1.$$

$$3.3.1.8. L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + x; \quad \dot{x}_0 = 0, x_0 = 2.$$

$$3.3.1.9. L = \frac{\dot{x}^2 - 1}{x^2}, \quad \dot{x}_0 = 0, x_0 = 1.$$

В задачах 3.3.1.10–3.3.1.12 треба знайти точки зупинки частинки, динаміка якої описується функцією Лагранжа  $L$  при заданих початкових умовах.

$$3.3.1.10. L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \sin x; \quad \dot{x}(0) = 1, x(0) = 0.$$

$$3.3.1.11. L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + x; \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{2}, x(0) = 1.$$

$$3.3.1.12. L = \frac{\dot{x}^2 - x^2 + 1}{x}; \quad \dot{x}(0) = 1, x(0) = 1.$$

### 3.3.2. Коливання в консервативних системах

В задачах механіки часто важливим є знання не самих розв'язків, тобто залежності координат від часу, а співвідношення спостережуваних характеристик руху, наприклад, зв'язку періоду коливань із енергією в консервативних системах. Коливання є можливим, якщо рух матеріальної точки є фінітним, тобто відбувається в кінцевій області зміни координати між двома точками зупинки  $x_1$  та  $x_2$ . У цих точках кінетична енергія перетворюється на нуль, повна енергія дорівнює потенціальній  $E = U$ , а  $\dot{x}(x = x_i) = 0, i = 1, 2$ . Якщо за допомогою закону збереження енергії вдається в явному вигляді виразити швидкість частинки через її координату  $\dot{x} = V(x, E)$ , то період коливального руху знаходиться із співвідношення

$$T(E) = 2 \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\dot{x}(x, E)}, \quad (3.16)$$

де залежності від енергії меж інтегрування визначаються коренями рівняння

$$\dot{x}(x_i, E) = V(x_i, E) = 0; \quad i = 1, 2.$$

### Задачі до параграфа 3.3.2

Для наведених нижче функцій Лагранжа вказати умови фінітності руху та знайти періоди коливань в залежності від енергії.

$$3.3.2.1. L = \dot{x}^2 - x^2.$$

$$3.3.2.2. L = \frac{\dot{x}^2}{x} - x - \frac{1}{x}.$$

$$3.3.2.3. L = \dot{x}^2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

$$3.3.2.4. L = \dot{x}^2 - (e^x - 1)^2.$$

$$3.3.2.5. L = \frac{\dot{x}^2 + 2x - 1}{x^2}.$$

$$3.3.2.6. L = \dot{x}^2 - \operatorname{tg}^2 x.$$

$$3.3.2.7. L = \dot{x}^2 - \operatorname{th}^2 x.$$

$$3.3.2.8. L = \dot{x}^2 + 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

$$3.3.2.9. L = \dot{x}^2 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

### 3.3.3. Закон збереження імпульсу

У тому випадку, коли координата  $x$  не входить у лагранжян (є циклічною змінною) зберігається відповідний їй узагальнений імпульс (3.10)  $p = \partial L / \partial \dot{x} = p(\dot{x}, t)$ . Якщо при цьому вдається виразити узагальнену швидкість у вигляді  $\dot{x} = V(p, t)$ , то розв'язок отримується у вигляді  $x = \int V(p, t) dt$ .

### Задачі до параграфа 3.3.3

Проінтегрувати рівняння руху, які відповідають таким функціям Лагранжа із заданими початковими умовами.

$$3.3.3.1. L = \frac{t^2 \dot{x}^2}{2}; \quad \dot{x}(1) = 1, x(1) = 0.$$

$$3.3.3.2. L = \frac{\dot{x}^2}{2} + t^2 \dot{x}; \quad \dot{x}(1) = 1, x(1) = 0.$$

$$3.3.6.3. L = \sqrt{\dot{x}^2 + t}; \quad \dot{x}(3) = 1, x(3) = 0.$$

$$3.4.3.4. L = \sqrt{\dot{x}^2 + t^2}; \quad \dot{x}(3) = 1, x(3) = \frac{3}{2}.$$

### 3.3.4. Інтеграл руху (енергія й імпульс) у системах із двома ступенями свободи

У випадку консервативних систем із двома ступенями свободи наявності закону збереження енергії недостатньо для інтегрування рівнянь динаміки у квадратурах. До того ж, за браком додаткового інтеграла рух може мати складний і навіть хаотичний характер. Ситуація спрощується за наявності такого додаткового інтеграла. Він може бути пов'язаний з існуванням циклічної змінної.

#### Задачі до параграфа 3.3.4

Знайдіть закони збереження та проінтегруйте рівняння руху систем з такими лагранжіанами

$$3.3.4.1. L = \frac{\dot{x}^2}{x} + x\dot{y}^2 + x.$$

$$3.3.4.2. L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x}.$$

$$3.3.4.3. L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x}.$$

$$3.3.4.4. L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + 2x\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2).$$

$$3.3.4.5. L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + x.$$

$$3.3.4.6. L = \frac{\dot{x}^2 + 2x\dot{y} + \dot{y}^2}{2x}.$$

$$3.3.4.7. L = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{x}^2}{1 + y^2} + \dot{y}^2 \right) - \frac{y^2}{2}.$$

### 3.3.5. Інтеграл руху (енергія й кутовий момент) у системах частинок із радіально-симетричним потенціалом взаємодії

Задача про рух двох матеріальних точок, потенціал взаємодії між якими  $U = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  залежить тільки від відносної відстані між ними  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ , зводиться до розв'язку задачі про плоский рух однієї точки в заданому центральному зовнішньому полі. Траєкторії  $\vec{r}_1$  та  $\vec{r}_2$  кожної із частинок (відносно їхнього спільного центру інерції, який прийнято за початок координат) знаходяться за формулами (див., наприклад, [12 : 44])

$$\vec{r}_1 = \frac{\mu}{m_1} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{\mu}{m_2} \vec{r}, \quad (3.17)$$

де  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  – вектор взаємної відстані між точками, початок координат розміщений у центрі інерції  $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$ ,  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – зведена маса. При рівності мас  $m_1 = m_2 = m$  зведена маса  $\mu = m/2$ .

Функцію Лагранжа частинки, що рухається в центральному полі, природно записати в плоских полярних координатах (див. § 2.2), в якій вона має вигляд

$$L = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r). \quad (3.18)$$

Вигляд функції Лагранжа (3.18) показує, що під час руху в центральному полі зберігаються енергія

$$E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = \text{const} \quad (3.19)$$

і момент імпульсу відносно центру поля

$$p_\phi = M = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{const}. \quad (3.20)$$

Нагадаємо, що узагальнений імпульс  $p_\phi = \partial L / \partial \dot{\phi}$ , який відповідає координаті  $\phi$  дорівнює проекції моменту імпульсу  $M_z = M$  на вісь  $z$ . З формули (3.19) видно, що під час руху в центральному полі координата  $\phi$  є циклічною. З урахуванням (3.20) перепишемо (3.19) як

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (3.21)$$

З формули (3.21) виходить, що радіальну частину руху в центральному полі можна розглядати як одновимірний рух у полі з ефективною енергією

$$U_{\text{eff.}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2\mu r^2}. \quad (3.22)$$

Величину  $M^2/2\mu r^2$  називають відцентровою енергією.

Знайдемо найбільшу та найменшу відстані між частинками при їх радіально симетричній взаємодії.

Ці відстані визначаються з умови обернення на нуль радіальної швидкості відносного руху  $\dot{r}(r_0) = 0$ . При цьому частинки загалом кажучи не зупиняються, бо залишається ненульовою їхня кутова швидкість. Для величини  $r_0$  з (3.21) знаходимо таке рівняння

$$\frac{M^2}{2\mu r_0^2} + U(r_0) = E. \quad (3.23)$$

У випадку інфінітного руху сталі величини  $E$  та  $M$  пов'язані з відносною швидкістю  $v_\infty$  на нескінченній відстані від центра поля та прицільною відстанню  $\rho$ . Прицільна відстань – це найменша відстань від силового центра, на якій би пролетіла частинка з масою  $\mu$ , якби була відсутня взаємодія частинок. Зв'язок між  $E$ ,  $M$  та  $v_\infty$ ,  $\rho$  має вигляд

$$E = \frac{\mu v_\infty^2}{2}, \quad M = \mu \rho v_\infty. \quad (3.24)$$

Для знаходження динаміки частинок з парним потенціалом взаємодії  $U = U(r)$  форми траєкторії цього руху необхідно скористатися рівнянням (3.21) та співвідношенням (3.20). З (3.21) виходить, що

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2\mu r^2}}}. \quad (3.25)$$

Ця формула в неявному вигляді задає залежність  $t = t(r)$ . Якщо її вдається розв'язати відносно  $r$  та знайти  $r = r(t)$ , то підставляючи це співвідношення в (3.20) знаходимо

$$\varphi = \frac{M}{\mu} \int \frac{dt}{r^2(t)} = \varphi(t) \quad (3.26)$$

і повне рішення динамічної задачі:  $r = r(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ .

Підставивши в (3.26) вираз для  $dt$  з (3.25) отримуємо формулу, яка описує більш просту задачу знаходження траєкторії руху

$$\varphi - \varphi_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2\mu r^2}}}. \quad (3.27)$$

### Задачі до параграфа 3.3.5

В задачах 3.3.5.1 – 3.3.5.5 треба знайти найбільшу та найменшу відстані між двома частинками з однаковими масами  $m_1 = m_2 = m$ , які взаємодіють за відомим законом  $U = U(r)$  в залежності від енергії і моменту в системі центра інерції

$$3.3.5.1. U = \frac{\alpha}{r};$$

$$3.3.5.2. U = \frac{\alpha}{r^2};$$

$$3.3.5.3. U = \frac{1}{r^4};$$

$$3.3.5.4. U = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right), m = 2.$$

$$3.3.5.5. U = \frac{1}{2} \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right), m = 2.$$

В задачах 3.3.5.6 – 3.3.5.10 треба проінтегрувати рівняння руху двох однакових частинок з масами  $m_1 = m_2 = 2$ , які взаємодіють за такими законами:

$$3.3.5.6. U = \frac{1}{2r^2}.$$

$$3.3.5.7. U = -\frac{1}{2r^2}.$$

$$3.3.5.8. U = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right).$$



$$3.3.5.9. U = \frac{1}{2} \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right).$$

$$3.3.5.10. U = \frac{1}{2r^n}, \quad n > 2.$$

### 3.3.6. Інтеграл руху та розсіювання частинок

Окремим випадком динаміки двох частинок з парною взаємодією є інфінітний рух, який зводиться до взаємного розсіювання. При цьому існує тільки мінімальна відстань зближення частинок  $r_{\min}$ , а при  $t \rightarrow \pm\infty$  частинки розходяться на нескінченну відстань і рухаються прямолінійно. У цьому випадку важливі не стільки подробиці їхнього руху в області зіткнення, скільки зміна напрямків і швидкостей руху частинок після взаємодії. У системі центра інерції задача зводиться до обчислення інтеграла (3.27) в інтервалі відстаней від  $r_{\min}$  до  $r = \infty$  (див. рис. 3.4(а)) за формулою

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{M dr}{r^2 \sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2\mu r^2}}}, \quad (3.28)$$

де  $r_{\min}$  є коренем рівняння (3.23).

«Геометрія» процесу зіткнення (у системі центра інерції) зображена на рис. 3.4(а), де кут  $\varphi_0$  визначається виразом (3.28). Основною характеристикою є кут розсіювання  $\chi = \pi - 2\varphi_0$ . Відповідна «геометрія» розсіювання в лабораторній системі відліку наведена на рис. 3.4(б).

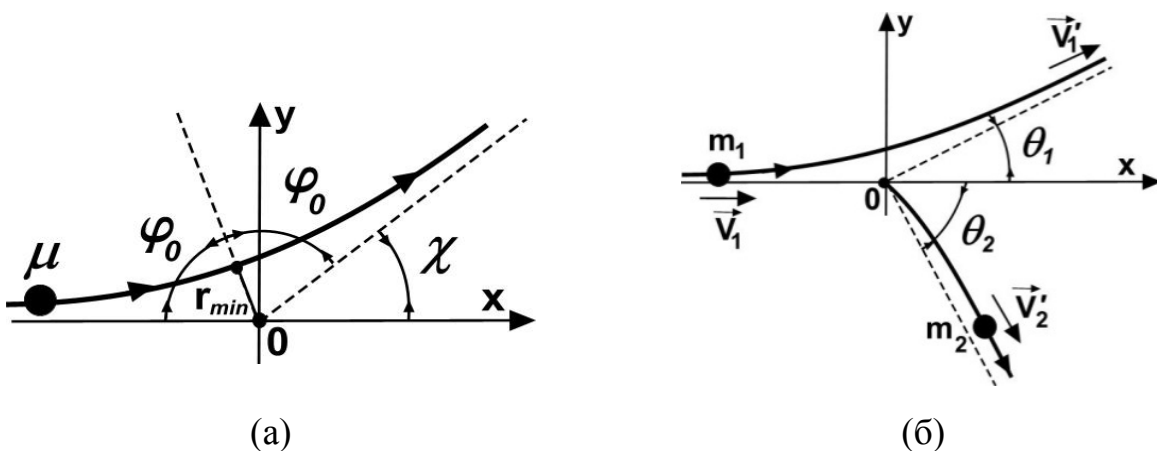


Рис. 3.4. (а) – Процес розсіювання частинок у системі центра інерції (розсіювальна частинка з номером 2 розміщена в центрі поля); (б) – той же процес у лабораторній системі відліку

Важливим є окремий випадок такого процесу, коли одна із частинок (далі – частинка з номером 2) до початку процесу розсіювання знаходиться у спокої. Оскільки спостережуваним є розсіювання частинок у лабораторній системі відліку, то необхідним є перерахунок отриманих результатів у цій системі. При цьому кут розсіювання частинки, що летить (з номером 1) зміниться й буде дорівнювати  $\theta_1$ . Частинка, що спочатку перебувала в стані спокою, зазнає віддачу й «полетить» під кутом  $\theta_2$  (див. рис. 3.4(б)). Зв'язок кутів розсіювання  $\theta_1$  та  $\theta_2$  у лабораторній системі та кута  $\chi$  в системі центра інерції визначається формулами ([12 : 64])

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}; \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \quad (3.29)$$

У реальних експериментах складно простежити за результатом розсіювання ізольованої пари частинок. Тому експеримент проводиться інакше: на розріджений газ однакових частинок («мішеней») спрямовується пучок однакових частинок з однорідною щільністю й однаковими енергіями (швидкостями). При цьому фіксується щільність частинок, розсіяних під різним кутом і кутова залежність цієї щільності. Основною характеристикою є так званий *ефективний перетин розсіювання*  $d\sigma$  – відношення числа частинок, розсіяних у цьому інтервалі кутів до щільності їхнього потоку (тому воно має розмірність площі). Кут розсіювання  $\theta$  є функцією відстані  $\rho$  (*прицільної відстані*), на якій частинка пройшла б від точки розташування частинки, що розсіює, якби взаємодії між частинками не було. Частинки із прицільною відстанню в інтервалі від  $\rho$  до  $\rho + d\rho$  розсіюються в інтервал кутів  $d\theta$ . Приймаючи щільність потоку за одиницю, отримаємо ефективний перетин як площу кільця з радіусами  $\rho$  та  $\rho + d\rho$

$$d\sigma = 2\pi \rho d\rho = 2\pi \rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta. \quad (3.30)$$

Береться модуль функції  $d\rho/d\sigma$ , оскільки площа  $d\sigma$  додатна, а кут відхилення зменшується зі зростанням прицільної відстані й  $d\rho/d\sigma < 0$ . Ефективний перетин розсіювання в тілесний кут  $dO = 2\sin\theta d\theta$  має такий вигляд

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| dO \quad (3.31)$$

В системі центра інерції ефективний перетин розсіювання визначається формулою

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi = \frac{\rho}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi. \quad (3.32)$$

Формула (3.30) з  $\theta = \theta_1$  в лабораторній системі відноситься до частинок, що розсіюються, а з  $\theta = \theta_2$  – до частинок, які спочатку були у спокої (розсіювальних). Зв'язок між трьома кутами  $\theta_1, \theta_2, \chi$  визначається формулами (3.29). Оскільки прицільна відстань визначається кутовим моментом (з формули (3.24) маємо  $\rho = M v_\infty / \mu$ ), то ефективний перетин знаходиться із залежності  $\chi = \chi(M)$ .

### Задачі до параграфа 3.3.6

**3.3.6.1.** Визначити кути відхилення при зіткненні двох взаємодіючих частинок з однаковими масами, якщо частинка з номером 2 у початковий момент була у спокої.

**3.3.6.2.** Визначити кути відхилення двох частинок, що зіштовхуються, з однаковими масами  $m_1 = m_2 = m = 2$ , в лабораторній системі відліку, якщо потенціал взаємодії має вигляд

$$U = \frac{1}{2r^2}.$$

**3.3.6.3.** Те саме для потенціалу

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right).$$

**3.3.6.4.** Те саме для електростатичного потенціалу з відштовхуванням між зарядами

$$U = \frac{1}{2r}.$$

**3.3.6.5.** Визначити ефективний перетин розсіювання потоку частинок на нерухомих частинках з тією же масою. Прийняти, що маси всіх частинок рівні  $m = 2$ , а енергія взаємодії має вигляд  $U = 1/(2r^2)$ .

## 3.4. Перетворення змінних у лагранжевій механіці

Дотепер ми розглядали динаміку механічних систем з огляду на підхід Ньютона або Лагранжа. При цьому користувалися виглядом лагранжіану та рівняннями Лагранжа, які в декартових координатах в інерці-

альних системах переходили в рівняння Ньютона. Урахування зв'язків, а також симетрії полів взаємодії призводили до зручності використання узагальнених координат, до яких можна перейти в лагранжіані системи. Однак лагранжевий підхід допускає більш широкий клас перетворень, який містить поряд з перетворенням координат також перетворення часу та самого лагранжіану, перехід до неінерціальних систем відліку тощо. Зокрема, можливим є розгляд систем, динаміка яких не є ньютонівською. Прикладом таких перетворень є релятивістські перетворення координат і часу. У деяких випадках для більш простого розв'язку задачі зручно перейти в іншу систему відліку, а після отримання результату повернутися у вихідну систему. Прикладом може бути розв'язання задачі про обертання вовчка, яка вирішується переходом у систему відліку, пов'язану із самим твердим тілом. Механічні задачі в «земних умовах» природно розв'язувати в системі відліку, пов'язаній з Землею, яка обертається навколо своєї осі. Ця система відліку не є інерціальною. Ще одним прикладом може бути вихрова динаміка рідини. Вихідна система є багаточастинковою ньютонівською, однак після усереднення відповідного лагранжіану та переходу до нових змінних – координат вихорів, для них виникає лагранжіан з рівняннями, які описують неньютонівську динаміку вихорів.

### 3.4.1. Перетворення координат

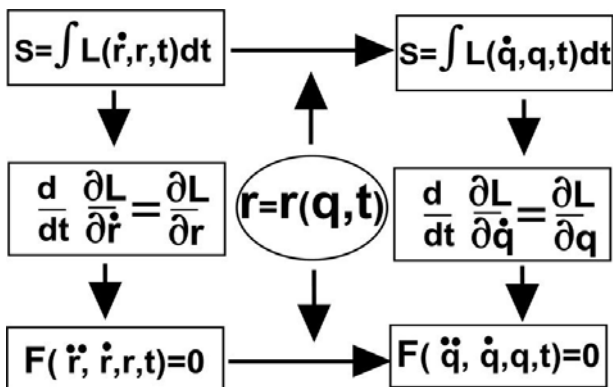


Рис. 3.5. Перехід до узагальнених координат у лагранжіані та у лагранжевих рівняннях

Почнемо із простого випадку, коли перетворюються тільки координати системи, про що йшла мова в розділі 2. При цьому час є зовнішнім параметром, якого на зачепило перетворення. Перетворення координат можна зробити безпосередньо в динамічних рівняннях, у які підставляються перетворені координати та їхні похідні. Однак таку підстановку можна зробити й безпосередньо в лагранжіані, у якому ступені похідних менші. Результат, природно, буде збігатися, оскільки мінімум дії при його варіації не залежить від вибору змінних. Зазначені підходи продемонстровані на рис. 3.5, де є два шляхи переходу від вихідної дії  $S = \int L(\dot{r}, r, t) dt$  в декартових координатах до остаточних рівнянь  $F(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) = 0$  в узагальнених координатах.

Ці два можливих підходи використані нижче в задачах.

### Задачі до параграфа 3.4.1

**3.4.1.1.** Функція Лагранжа системи із двома ступенями свободи має вигляд  $L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - x^2 - y$ . Розгляньте наступне перетворення  $x = \xi + \eta$ ,  $y = -2\eta$  до нових координат  $(\xi, \eta)$ . Складіть нову функцію Лагранжа системи. Напишіть рівняння Ейлера – Лагранжа у вихідній і новій системах координат і перевірте, що зі справедливості перших впроходить справедливість других.

**3.4.1.2.** Функція Лагранжа системи має вигляд  $L = 2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - xy + 2x$ . Підберіть перетворення повороту і зсуву, що діагоналізують її потенціальну енергію. Чи стане при цьому квадратична форма, що відповідає кінетичній енергії, діагональною? Напишіть рівняння руху у вихідній і новій системах координат і переконайтеся в їхній інваріантності.

### 3.4.2. Перетворення координат і часу

Якщо перетворення зачіпає крім координат ще й час, то природно, що таке перетворення можна провести в динамічних рівняннях, отриманих із принципу мінімуму дії з вихідним лагранжіаном. Однак не можна зробити таку заміну тільки в лагранжіані й скористатися рівняннями Лагранжа для нього в нових змінних. Принцип найменшої дії формулюється для часового інтеграла від функції Лагранжа. Тому необхідно в дії перейти від інтегрування по старому часу до інтегрування по новому часу, тобто зробити заміну  $L(r_t, r, t)dt \rightarrow \tilde{L}(q_\tau, q, \tau)d\tau$ . Тут і далі нижній індекс позначає диференціювання по відповідній змінній. Якщо заміна змінних має вигляд  $r = r(q, \tau)$  та  $t = t(q, \tau)$ , маємо  $dt = [(\partial t / \partial q)q_\tau + (\partial t / \partial \tau)]d\tau$ , і тому новий лагранжіан  $\tilde{L}(q_\tau, q, \tau)$  не співпадає зі старим  $L(r_t, r, t)$  при заміні в ньому змінних. Але при виведенні рівнянь Лагранжа з лагранжіану  $\tilde{L}(q_\tau, q, \tau)$  ми отримаємо правильні остаточні рівняння в термінах  $q_{\tau\tau}, q_\tau, q, \tau$  (див. рис. 3.6).

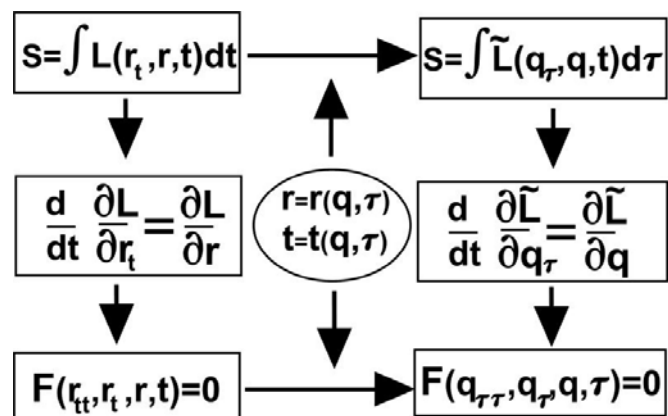


Рис. 3.6. Перехід до узагальнених координат у лагранжіані й у лагранжевих рівняннях при одночасній зміні часової змінної

### Задачі до параграфа 3.4.2

**3.4.2.1.** Знайдіть перетворення функції Лагранжа при переході до нових координат й часу, якщо у вихідних змінних вона має вигляд  $L(x, t) = -\sqrt{1 - x_t^2} + (x + 2t)^2$ , а перетворення мають вигляд  $x = (5q - 3\tau)/4$ ,  $t = (5\tau - 3q)/4$ . Як перетворюються швидкість і її похідна? Складіть рівняння руху у двох системах і перевірте їхню інваріантність.

**3.4.2.2.** Для довільної системи з одним ступенем свободи покажіть, що перетворення координат і часу  $x = q\tau$ ,  $t = q$  залишають рівняння руху правильними.

### 3.4.3. Перехід у неінерціальні системи відліку

Окремим випадком перетворення координат та часу є перехід від одних систем відліку до інших. Такий перехід був розглянутий вище в задачі 3.4.2.1 на прикладі перетворення Лоренца в релятивістській механіці. У наступних задачах розглянуто нерелятивістські переходи, але в неінерціальні системи відліку. Перехід між інерціальними системами здійснюється галілеєвським перетворенням, яке не змінює час, але перетворює швидкості у двох системах:  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ , де  $\vec{V}$  постійна відносна швидкість переміщення двох систем. При переході в неінерціальну систему відліку її відносна швидкість  $\vec{V}$  змінює не тільки свою величину, але й напрямок, що може призводити до додаткового обертання системи. Перехід у неінерціальну систему зручно робити в лагранжіані системи, вигляд якого в інерціальній системі відомий

$$L_0 = \sum \frac{m_i \vec{v}_{0,i}^2}{2} - U(\vec{r}_{0,i}). \quad (3.33)$$

При переході в неінерціальну систему, яка рухається зі змінною швидкістю  $\vec{V}(t)$  необхідно зробити в (3.33) заміну  $\vec{v}_{0,i} = \vec{v}'_i + \vec{V}(t)$ . При цьому в потенціальній енергії координата також перетвориться:  $\vec{r}_{0,i} = \vec{r}'_i + \int \vec{V}(t) dt$ . Лагранжіан отримує вигляд

$$L' = \sum \frac{m_i}{2} \vec{v}'_i{}^2 - \sum m_i \frac{d\vec{V}}{dt} \vec{r}'_i - U \left[ \vec{r}'_i + \int \vec{V}(t) dt \right], \quad (3.34)$$

а рівняння Лагранжа –

$$m_i \frac{d\vec{v}'_i}{dt} = -m_i \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'_i}. \quad (3.35)$$

Отже, з'являється додаткове однорідне поле та однорідна додаткова сила інерції.

При обертанні системи відліку в ній виникає додаткова швидкість і  $\vec{v}'_i = \vec{v}_{0i} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{0i}]$ , де  $\vec{\Omega}$  кутова швидкість обертання нової системи. Лагранжіан отримує остаточний вигляд

$$L = \sum \left( \frac{m_i}{2} \vec{v}'_i{}^2 - \frac{d\vec{V}}{dt} m_i \vec{r}_i + m_i \vec{v}_i [\vec{\Omega}, \vec{r}_i] + \frac{m_i}{2} [\vec{\Omega}, \vec{r}_i]^2 \right) - U, \quad (3.36)$$

а рівняння руху форму

$$m_i \frac{d\vec{v}'_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} - m_i \frac{d\vec{V}}{dt} + m_i \left[ \vec{r}_i, \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right] + 2m_i [\vec{v}_i, \vec{\Omega}] + m_i [\vec{\Omega}, [\vec{r}_i, \vec{\Omega}]]. \quad (3.37)$$

Два останні доданки в правій частині рівняння називаються силою Коріоліса та відцентровою силою відповідно.

### Задачі до параграфу 3.4.3

**3.4.3.1.** Лінійний осцилятор з масою  $m$ , прикріплений до пружини довжини  $l$  із жорсткістю  $k$  здійснює одновимірні коливання. При цьому інший кінець пружини під дією зовнішньої сили здійснює гармонійні коливання з амплітудою  $A$  та частотою  $\Omega$ . Знайти амплітуди коливання осцилятора на частоті сили, що змушує, у лабораторній системі та в неінерціальній системі, пов'язаній з коливним кінцем пружини (рис. 3.7).

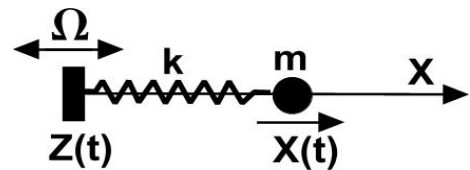


Рис. 3.7. Рух гармонічного осцилятора з періодично осцилюючою точкою закріплення

**3.4.3.2.** Математичний маятник з масою  $m$  та довжиною нитки підвісу  $l$  обертається в площині  $(x, z)$  з кутовою швидкістю, що набагато більше власної частоти  $\Omega \gg \omega_0 = \sqrt{g/l}$ . В момент часу  $t=0$  система з фіксованою в ній точкою почепу маятника починає вільне падіння в полі сили тяжіння за напрямком  $z$ . Початкові умови руху:  $x=l, z=0, \dot{z}=-l\Omega$ . Знайти траєкторію руху  $x = x(z)$  в лабораторній системі відліку та момент часу, починаючи з якого падіння маси стає монотонним.

**3.4.3.3.** Розглянути відхилення від вертикалі на схід вільно падаючого з висоти  $h$  тіла під дією сили Коріоліса. Силою тертя знехтувати.

**3.4.3.4.** Розглянути відхилення від вертикалі на південь тіла, що вільно падає з висоти  $h$  під дією відцентрової сили. Силою тертя зневажувати.

### 3.4.4. Перетворення енергії та імпульсів при зміні координат

В § 3.4.1 було розглянуто перетворення рівнянь динаміки при зміні системи координат. Було показано, що в тому випадку, коли перетворення змінних не зачіпає часу та стосується тільки координатної системи (перетворення координат може містити час як параметр), можлива заміна координат у двох системах безпосередньо в лагранжіані. При цьому лагранжеві рівняння у двох системах збігаються при підстановці в них зв'язку «нових» і «старих» координат. Однак таку підстановку не можна робити, наприклад, у виразі для енергії системи: енергія має різну величину в різних системах відліку. Це ж стосується й узагальнених імпульсів системи.

Розглянемо динамічну систему із двома ступенями свободи, що описується функцією Лагранжа  $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$  та перетворення координат

$$x = x(u, v, t); \quad y = y(u, v, t), \quad (3.38)$$

якому відповідає перетворення швидкостей

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial x}{\partial t}; \quad \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (3.39)$$

Оскільки час не зачеплений перетворенням, то «нова» функція Лагранжа має вигляд

$$\tilde{L}(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t) = L[x(u, v, t), y(u, v, t), \dot{x}(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t), \dot{y}(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t), t]. \quad (3.40)$$

Узагальнені імпульси в цій системі координат визначаються у такий спосіб

$$p_u = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial u} = p_x \frac{\partial x}{\partial u} + p_y \frac{\partial y}{\partial u}; \quad (3.41)$$

$$p_v = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{v}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial v} = p_x \frac{\partial x}{\partial v} + p_y \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Отже, зв'язок узагальнених імпульсів у двох системах координат описується формулами

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$



які співпадають з формулами (2.4) для перетворення диференціалів при перетворенні координат.

Енергії в різних координатних системах визначаються у такий спосіб

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} - L = \\
 = \tilde{E} &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{v}} \dot{v} - \tilde{L} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{v}} \dot{v} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{v}} \dot{v} - L = \\
 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} \right) - L = \\
 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{dy}{dt} - L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

Остаточно знаходимо співвідношення між енергіями

$$\tilde{E}_{uv} = E_{xy} - p_x \frac{\partial x}{\partial t} - p_y \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (3.43)$$

Зазначимо, що через довільність початку відліку енергії в цьому співвідношенні може виникнути додаткова константа.

### Задачі до параграфа 3.4.4

**3.4.4.1.** Знайти перетворення узагальнених імпульсів і енергії при переході в обертову систему відліку.

**3.4.4.2.** Знайдіть співвідношення, що пов'язують узагальнені імпульси й енергії системи із двома ступенями свободи при перетворенні системи координат  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  за законом  $x = u - tv$ ,  $y = 2tuv$ .

**3.4.4.3.** При переході від координат  $(x, y)$  до координат  $(u, v)$  узагальнені імпульси та енергія перетворюються за законом

$$p_u = (v - 2t^2)p_x + v^2 p_y; \quad p_v = up_x + (2u + 1)vp_y; \quad E_{uv} = E_{xy} + 4tup_x.$$

Знайти явний вигляд перетворення  $(x, y) \rightarrow (u, v)$ .

**3.4.4.4.** Розглянути перехід між двома інерціальними системами відліку як перетворення координат.

### 3.5. Розв'язки та відповіді до розділу 3

3.2.1. Відповідь:  $L = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}^2}{2} - \frac{k}{2} \left( \sqrt{x^2 + y^2} - l_0 \right)^2 - m_2 g y$ .

3.2.2. Це плоскі параболічні координати (див. ф-ли (2.29))

$$L = \frac{m}{8} (u + v) \left( \frac{\dot{u}^2}{u} + \frac{\dot{v}^2}{v} \right) - U \left( \frac{u - v}{2}, \sqrt{uv} \right).$$

3.2.3. Функція Лагранжа має вигляд

$$L = \frac{1}{2} m l^2(t) \dot{\varphi}^2 + m g l(t) \cos \varphi.$$

У функції Лагранжа відкинутий доданок  $m \dot{l}^2/2$ , тому що він залежить тільки від заданої функції часу та може бути представлений як повна похідна за часом від деякої функції.

Рівняння Лагранжа має вигляд

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{l(t)} [2\dot{l}(t)\dot{\varphi} + g \sin \varphi] = 0.$$

3.2.4. Відповідь

$$(1 + 4a^2 x^2) \ddot{x} + 4abxy\ddot{y} + 8a^2 x\dot{x}^2 + 4abx\dot{y}^2 + 2agx = 0;$$

$$(1 + 4b^2 y^2) \ddot{y} + 4abxy\ddot{x} + 8b^2 y\dot{y}^2 + 4aby\dot{x}^2 + 2bgy = 0.$$

3.2.5. При вільному русі зберігаються імпульс і енергія. Для релятивістської частинки маємо

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \vec{p}_0; \quad E = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \vec{v} - L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = E_0.$$

Із цих співвідношень походять вирази для швидкості, яка зберігається

$$\vec{v} = \vec{p} \frac{c^2}{E} = \vec{p}_0 \frac{c^2}{E_0} = \vec{v}_0$$

та закон руху  $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$ .

**3.2.6.** Оскільки координата не входить у лагранжیان, то зберігається імпульс системи

$$p = \frac{t \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \frac{t_0 v_0}{\sqrt{1 + v_0^2}}.$$

Із цього рівняння знаходимо закон руху

$$x(t) = x_0 + p \operatorname{Arcch}\left(\frac{t}{p}\right) - p \operatorname{Arcch}\left(\frac{t_0}{p}\right).$$

**3.2.7.** Ця задача в § 1.7 була розглянута в ньютонівському підході. У підході Лагранжа ми зважаємо на лагранжیان

$$L = \frac{m}{2} \left[ 1 + \left( \frac{dF}{dx} \right)^2 \dot{x}^2 \right] - mgF(x).$$

З нього випливає рівняння Лагранжа

$$\left[ 1 + (F')^2 \right] \ddot{x} + 2F'F''\dot{x} + gF' = 0,$$

що співпадає з ньютонівським рівнянням (1.46).

З наведеного лагранжіану відповідно до виразу для енергії (3.11) випливає формула для енергії системи

$$E = \frac{m}{2} \left[ 1 + \left( \frac{dF}{dx} \right)^2 \right] \dot{x}^2 + mgF(x).$$

**3.2.8.** Функція Лагранжа у вихідних координатах має вигляд

$$L = \frac{mR^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{k}{2} \left( 2R \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - l_0 \right)^2$$

В нових координатах функція Лагранжа перетвориться так

$$L = mR^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{k}{2} (2R \cos \theta_1 - l_0)^2. \quad (1.48)$$

Отже, координата  $\theta_2$  є циклічною, що співвідноситься з можливістю повороту системи як цілого на довільний кут уздовж кільця. Із цим пов'язане збереження кутового моменту

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = 2mR^2 \dot{\theta}_2 = M.$$

Координата  $\theta_2$  змінюється за законом

$$\theta_2 = \frac{M}{2mR^2}t + C.$$

Час не входить явно у функцію Лагранжа (1.48), тому зберігається енергія

$$E = mR^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{k}{2}(2R \cos \theta_1 - l_0)^2 = mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{M^2}{4mR^2} + \frac{k}{2}(2R \cos \theta_1 - l_0)^2.$$

Звідси знаходиться розв'язок задачі у квадратурах у вигляді інтеграла

$$t - t_0 = R\sqrt{m} \int \frac{d\theta_1}{\sqrt{\left(E - \frac{M^2}{4mR^2}\right) - 2kR^2 \left(\cos \theta_1 - \frac{l_0}{2R}\right)^2}},$$

який виражається в термінах еліптичного інтеграла першого роду.

**3.3.1.1.** У цьому випадку енергія дорівнює  $E = \dot{x}^2 + 1/x^2$ . З початкових умов походить, що  $E = 1$ . Звідси

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}; \quad t = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}} + C; \quad t = \sqrt{x^2 - 1} + C.$$

Сталу  $C$  знаходимо з початкових умов  $C = 1$ . Остаточно маємо  $x = \sqrt{1 + t^2}$ .

**3.3.1.2.** З початкових умов отримуємо вигляд енергії  $E = \dot{x}^2 - \operatorname{tg}^2 x = 4$  та залежність

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 x}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x.$$

Звідси

$$x = \arcsin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \sqrt{3}t \right).$$

**3.3.1.3.** Відповідь

$$E = \dot{x}^2 - e^x = 3; \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{3 + e^x}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \operatorname{Arcsh} \sqrt{3} - \operatorname{Arcsh} \left[ \sqrt{3} \exp \left( -\frac{x}{2} \right) \right] \right\}.$$

**3.3.1.4.** Відповідь:  $E = \dot{x}^2 + \frac{1}{x} = 1$ ;  $t = \sqrt{x(x-1)} + \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$ .

**3.3.1.5.** Відповідь:  $E = \frac{\dot{x}^2}{x} + x = 2$ ;  $x(t) = 1 + \sin t$ .

**3.3.1.6.** Відповідь:  $E = \frac{\dot{x}^2}{x} - x - \frac{1}{x} = -3$ ;  $t = \text{Arcch}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{5}}\right) - \text{Arcch}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ ;

**3.3.1.7.** Відповідь:  $E = \frac{\dot{x}^2 + 1}{x} = 1$ ,  $x(t) = 1 + \frac{t^2}{4}$ .

**3.3.1.8.** Відповідь:  $E = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} - x = -1$ ;  $x(t) = 1 + \sqrt{1+t^2}$ .

**3.3.1.9.** Відповідь:  $E = \frac{\dot{x}^2 + 1}{x^2} = 1$ ,  $x(t) = \text{ch } t$ .

**3.3.1.10.** Енергія системи дорівнює  $E = \dot{x}^2/2 + \sin x$ . З початкових умов маємо  $E = 1/2$ . У точці зупинки  $x_0$  швидкість дорівнює нулю, а  $\sin x_0 = 1/2$ . Таким чином,

$$x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

**3.3.1.11.** З урахуванням початкових умов енергія дорівнює

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} - x = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1,$$

В точці зупинки  $\dot{x} = 0$ , а

$$x_0 = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

**3.3.1.12.** Енергія з урахуванням початкових умов дорівнює

$$E = \frac{1}{x}(\dot{x}^2 + x^2 - 1) = 1.$$

Точка зупинки визначається рівнянням

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 1,$$

що дає  $x_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

**3.3.2.1.** Систему описує гармонічний осцилятор. Точки зупинки  $\dot{x} = 0$  визначаються з умови  $x_i^2 = E$ , тобто  $x_{1,2} = \pm\sqrt{E}$ . Період коливання дорівнює

$$T(E) = 2 \int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} \frac{dx}{\sqrt{E - x^2}} = 2\pi$$

та не залежить від амплітуди коливання.

**3.3.2.2.** Рух є фінітним при всіх  $E > 0$ . Період дорівнює  $T = 2\pi$ .

**3.3.2.3.** Рух є фінітним при  $-1 < E < 0$  та інфінітним при  $E > 0$ . Координати точок зупинки коливної частинки рівні  $x_{1,2} = (1 \mp \sqrt{1 - |E|}) / |E|$ , період коливання  $T = 2\pi / |E|^{3/2}$ . Частота коливання дорівнює  $\omega = |E|^{3/2}$  та зростає зі збільшенням енергії та амплітуди коливання. Якщо відраховувати енергію від її мінімального значення  $E = -1 + \varepsilon$ , то при малих амплітудах коливань маємо  $\omega \approx 1 - 3\varepsilon/2$ , тобто частота падає з ростом амплітуди. Таке поведіння називається *м'якою нелінійністю коливань*.

**3.3.2.4.** Коливанням відповідає інтервал енергій  $0 < E < 1$ . При цьому межі коливань мають координати  $x_{1,2} = \ln(1 \mp \sqrt{E})$ , період коливань дорівнює  $T = 2\pi / \sqrt{1 - E}$ . Отже, частота наближається до нуля в граничному випадку  $E \rightarrow 0$ .

**3.3.2.5.** Рух є фінітним при  $-1 < E < 0$  та інфінітним при  $E > 0$ . Період коливання дорівнює  $T = 2\pi / \sqrt{|E|}$ .

**3.3.2.6.** Енергія коливань додатна  $E > 0$ , їхній період дорівнює  $T = 2\pi / \sqrt{1 + E}$ .

**3.3.2.7.** У цьому випадку потенціальна енергія дорівнює  $U = \text{th}^2 x$ . Енергія коливань змінюється в інтервалі  $0 < E < 1$ . Період коливань дорівнює  $T = 2\pi / \sqrt{1 - E}$ .

**3.3.2.8.** Енергія коливань змінюється в інтервалі  $-1 < E < 0$ . Період коливань дорівнює  $T = 2\pi / \sqrt{|E|}$ .

**3.3.2.9.** Енергія коливань змінюється в інтервалі  $-1 < E < 0$ . Період коливань дорівнює  $T = 2\pi / \sqrt{|E|}$ .

**3.3.3.1.** Оскільки  $x$  – циклічна координата, то  $\partial L / \partial \dot{x} = t^2 \dot{x} = p_x = \text{const}$ . Зважаючи на початкові умови  $\dot{x}(1) = 1$ ,  $x(1) = 0$  маємо  $t^2 \dot{x} = 1$ . Звідси виходить, що  $dx = dt/t^2$  та  $x = -1/t + C$ . З початкових умов знаходимо, що

$$C = 1. \text{ Остаточню} \quad x(t) = -\frac{1}{t} + 1.$$

**3.3.3.2.** Перший інтеграл дорівнює

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + t^2 = p = 1.$$

Звідси з урахуванням початкових умов

$$x(t) = t - \frac{t^3}{3}.$$

**3.3.3.3.** Перший інтеграл дорівнює

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + t}} = \frac{1}{2}.$$

Звідси

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{t}{3}}, \quad x(t) = \frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2} + C.$$

З початкових умов маємо, що  $C = -2$ . Остаточо

$$x(t) = 2 \left[ \left( \left( \frac{t}{3} \right) \right)^{3/2} - 1 \right].$$

**3.3.3.4.** Перший інтеграл  $p_x = \partial L / \partial \dot{x} = \dot{x} / \sqrt{\dot{x}^2 + t^2}$ . Підстановка початкових умов дає  $p_x = 1 / \sqrt{10}$ . Розв'язуючи отримане алгебраїчне рівняння відносно  $\dot{x}$ , отримуємо  $\dot{x} = t/3$ , звідки остаточно  $x(t) = t^2/6$ .

В задачах 3.3.4.1 – 3.3.4.7 є закон збереження енергії

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const},$$

тому що час не входить безпосередньо у відповідні функції Лагранжа. Нагадаємо, що у випадку, коли функція Лагранжа має вигляд  $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$ , а кінетична енергія є квадратичною функцією швидкостей, то  $E = T(q, \dot{q}) + U(q)$ . Крім того, серед узагальнених координат є циклічні, і відповідні цим координатам узагальнені імпульси зберігаються.

**3.3.4.1.** Оскільки функція Лагранжа  $L$  не містить явно координати

у, то разом з енергією 
$$E = \frac{\dot{x}^2}{x} + x \dot{y}^2 - x = \text{const}$$

зберігається також узагальнений імпульс, який відповідає циклічній координаті  $y$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = p = 2x\dot{y} = \text{const}$$

Підставивши значення  $\dot{y} = p/2x$  у вираз для енергії маємо

$$\dot{x}^2 = x^2 + Ex - \frac{p^2}{4}$$

звідки

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + Ex - \frac{p^2}{4}}} = \text{Arch} \left( \frac{2x + E}{\sqrt{E^2 + p^2}} \right);$$

$$x = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{E^2 + p^2} \text{ch}(t - t_0) - E \right].$$

Залежність  $y(t)$  знаходиться з виразу для імпульсу  $\dot{y} = p/2x$

$$y - y_0 = p \int \frac{dt}{\sqrt{E^2 + p^2} \text{ch}(t - t_0) - E} = 2 \text{arctg} \left[ \frac{\sqrt{E^2 + p^2} \exp(t - t_0) - E}{p} \right].$$

Цій формулі можна надати трохи іншого вигляду, перевіривши що

$$\text{arctg} \frac{\sqrt{E^2 + p^2} \exp(t) - E}{p} =$$

$$= \text{arctg} \left[ \frac{\sqrt{E^2 + p^2} + E}{p} \text{th}(t) \right] + \text{arctg} \frac{\sqrt{E^2 + p^2} - E}{p}.$$

Отже, при зсуві константи інтегрування  $y_0$  розв'язання можна уявити у вигляді

$$y = \text{arctg} \left[ \frac{\sqrt{E^2 + p^2} + E}{p} \text{th}(t - t_0) \right] + y_1.$$

З розв'язків для  $x(t)$  та  $y(t)$  легко знайти залежність  $x = x(y)$

$$x = \frac{E}{2} \left( 1 + \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt{1 - b^2 \text{tg}^2 y}} \right); \quad b = \frac{E}{E + \sqrt{E^2 + p^2}},$$



показану на рис. 3.8. Зауважимо, що при  $t \rightarrow \infty$  швидкість  $\dot{y} \rightarrow 0$ , але відповідна компонента узагальненого імпульсу залишається кінцевою.

**3.3.4.2.** Для розглянутої системи функція Лагранжа не залежить явно від координати  $y$  та від часу. Тому зберігається узагальнений імпульс, який відповідає координаті  $y$

$$p_y = \frac{2\dot{y}}{x},$$

та енергія системи

$$E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x}.$$

Із цих двох співвідношень отримуємо рівняння

$$\dot{x} = \pm \sqrt{Ex - \frac{p_y^2 x^2}{4}},$$

в якому знак визначається початковими умовами. Звідси

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{Ex - \frac{p_y^2 x^2}{4}}} = \pm \frac{2}{p_y} \arcsin \left( \frac{p_y^2}{2E} x - 1 \right),$$

$$x = \frac{2E}{p_y^2} \left\{ 1 \pm \sin \left[ \frac{p_y(t - t_0)}{2} \right] \right\}.$$

Нарешті, з виразу для імпульсу знаходимо

$$y - y_0 = \frac{p_y}{2} \int x(t) dt = \frac{E}{p_y} \left\{ t \pm \frac{2}{p_y} \cos \left[ \frac{p_y(t - t_0)}{2} \right] \right\}.$$

Отриманий результат містить чотири константи інтегрування:  $p_y, E, y_0, t_0$ . Вони, а також знак у відповідях, визначаються із чотирьох початкових умов задачі. Наприклад, якщо  $x(0) = 1, y(0) = 0, \dot{x}(0) = -1, \dot{y}(0) = 1$ , маємо  $p_y = 2, E = 1, y_0 = 0, t_0 = \pi/2$ . Знак у відповідях потрібно вибирати “-”.

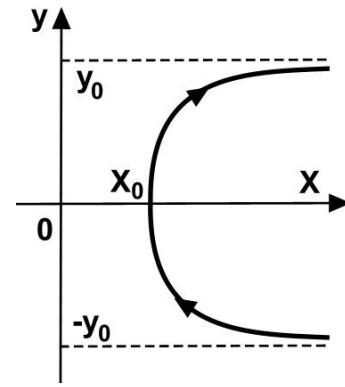


Рис. 3.8. Рух частинки на двовимірній площині координат  $(x, y)$ .

$$y_0 = \arctg(1/b); x_0 = E(1 + b)/2b$$

**3.3.4.3.** Розглянута система – система з трьома ступенями свободи. Вона має три інтеграли руху. Це закон збереження енергії

$$E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x} = \text{const}$$

та закони збереження двох компонент імпульсу

$$p_y = \frac{\dot{z}^2}{x} = \text{const}; \quad p_z = \frac{\dot{y}}{x} = \text{const}.$$

Із цих трьох співвідношень отримуємо вираз для швидкості  $\dot{x}$

$$\dot{x}^2 = Ex - p_y p_z x^2.$$

Звідси

$$x(t) = \frac{E}{2p_y p_z} \left\{ \sin \left[ \sqrt{p_y p_z} (t - t_0) \right] + 1 \right\}.$$

Інтегруючи співвідношення  $\dot{y} = p_z x$ ,  $\dot{z} = p_y x$  знаходимо

$$y(t) = y_0 + \frac{E}{2p_y} \left\{ t - t_0 - \frac{1}{\sqrt{p_y p_z}} \cos \left[ \sqrt{p_y p_z} (t - t_0) \right] \right\};$$

$$z(t) = z_0 + \frac{E}{2p_z} \left\{ t - t_0 - \frac{1}{\sqrt{p_y p_z}} \cos \left[ \sqrt{p_y p_z} (t - t_0) \right] \right\}.$$

**3.3.4.4.** Оскільки лагранжیان не містить ні часу, ні координати  $y$ , то зберігаються енергія та узагальнений імпульс, який відповідає циклічній координаті

$$E = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2x\dot{x}\dot{y}) = \text{const}; \quad p_y = \dot{y} + x\dot{x} = \text{const}.$$

Підставивши зв'язок  $\dot{y} = p_y - x\dot{x}$  у вираз для енергії отримаємо

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{2E - p_y^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$$

та рішення в неявному вигляді

$$t = \frac{1}{\sqrt{2E - p_y^2}} \int \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2E - p_y^2}} \left( x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x \right).$$

Ми обрали початкову умову  $y(0) = 0$ . Зі зв'язку  $\dot{y} = p_y - x\dot{x}$  при цьому знаходимо

$$y = \int (p_y - x\dot{x}) dt = \int \left( \frac{p_y}{\dot{x}} - x \right) dx = \int \left( \frac{p_y}{\sqrt{2E - p_y^2}} \sqrt{1 - x^2} - x \right) dx.$$

При початковій умові  $y(0) = 0$  остаточно маємо

$$y = \frac{p_y}{2\sqrt{2E - p_y^2}} \left( x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x \right) - \frac{x^2}{2}.$$

**3.3.4.5.** Оберемо такі початкові умови:  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $p_x(0) = 0$ ,  $p_y(0) = p_0$ . Рівняння Лагранжа при цьому мають вигляд

$$\dot{p}_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 1; \quad \dot{p}_y = \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Звідси знаходимо

$$p_x = t; \quad p_y = p_0.$$

З іншого боку

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}} = t; \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}} = p_0. \quad (3.45)$$

Крім  $y$ -компоненти узагальненого імпульсу  $p_y = p_0 = \text{const}$  ( $y$  – циклічна координата) зберігається також енергія (час не входить явно до функції Лагранжа)

$$\begin{aligned} E &= \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}} - x = \\ &= \sqrt{1 + p_x^2 + p_y^2} - x = \sqrt{1 + p_0^2 + t^2} - x = E_0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Обраним початковим умовам відповідає початкова енергія  $E_0 = \sqrt{1 + p_0^2}$ . За допомогою (3.46) легко знаходимо залежність координати  $x$  від часу

$$x(t) = \sqrt{1 + p_0^2 + t^2} - \sqrt{1 + p_0^2}. \quad (3.47)$$

Для визначення часової еволюції координати  $y$  помітимо, що з виразів (3.45) для  $p_y$  та (3.46) для  $E$  маємо

$$\frac{p_0}{E_0 + x} = \frac{p_0}{\sqrt{1 + p_0^2 + t^2}} = \dot{y},$$

тому

$$y = \int \frac{p_0 dt}{\sqrt{1 + p_0^2 + t^2}};$$

$$y = p_0 \operatorname{Arcsh} \frac{t}{\sqrt{1 + p_0^2}}. \quad (3.48)$$

З (3.47) та (3.48) знаходимо рівняння траєкторії

$$x = \sqrt{1 + p_0^2} \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{y}{p_0} \right) - 1 \right] = 2\sqrt{1 + p_0^2} \operatorname{sh}^2 \left( \frac{y}{2p_0} \right). \quad (3.49)$$

### 3.3.4.6. Другий доданок у функції Лагранжа

$$L = \frac{\dot{x}^2 + 2x\dot{y} + \dot{y}^2}{2x}$$

являє собою повну похідну за часом від  $y(t)$  та може бути відкинутий, тому що не впливає на рівняння руху. Виключивши його приходимо до функції Лагранжа

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2x},$$

яка з точністю до множника  $1/2$  збігається з лагранжіаном, який був розглянутий в задачі 3.3.4.2. При цьому змінюється визначення узагальненого імпульсу  $p_y$ , але оскільки він зберігається, то це несуттєво.

**3.3.4.7.3** виразів для енергії та компоненти імпульсу  $p_x$ , які зберігаються

$$E = \frac{\dot{x}^2}{1 + y^2} + \dot{y}^2 + y^2 = E_0; \quad p_x = \frac{\dot{x}}{1 + y^2} = p_0$$

отримуємо

$$\dot{y}^2 = (2E_0 - p_0^2) - (1 + p_0^2)y^2;$$

$$y = \sqrt{\frac{2E_0 - p_0^2}{1 + p_0^2}} \sin \left[ \sqrt{1 + p_0^2} (t - t_0) \right].$$

З виразу для імпульсу  $p_x$  маємо, що

$$\dot{x} = p_0(1 + y^2);$$

$$x - x_0 = \frac{p_0 \left[ p_0^2 + 2(E_0 + 1) \right]}{2(1 + p_0^2)} (t - t_0) - \frac{p_0(2E_0 - p_0^2)}{4(1 + p_0^2)^{3/2}} \cos 2\sqrt{1 + p_0^2} (t - t_0).$$

**3.3.5.1.** Для потенціалу  $U = \alpha/r$  маємо  $\mu = m/2$  та

$$\frac{M^2}{2\mu r_0^2} + \frac{a}{r_0} = E$$

звідки

$$r_0 = r_{\min, \max} = \frac{1}{2mE} \left( ma \pm \sqrt{m^2 a^2 + 4EmM^2} \right). \quad (3.50)$$

Якщо  $\alpha > 0$ , то повна енергія може бути тільки більше нуля  $E > 0$ . Оскільки відстань  $r_0$  – додатна величина, то при  $\alpha > 0$  є тільки найближча відстань  $r_0 = r_{\min}$  (знак «+» у формулі (3.50)), тобто рух є інфінітним. Якщо  $\alpha < 0$ , то рух інфінітний при  $E > 0$  та фінітний при  $E < 0$  (є як найменша  $r_0 = r_{\min}$ , так і найбільша  $r_0 = r_{\max}$  відстані). У розглянутому потенціалі при будь-яких значеннях інтегралів руху  $E < 0, M$  цей рух відбувається по замкненим траєкторіям – еліпсам.

**3.3.5.2.** Потенціал  $U = \alpha/r^2$  є особливим. У цьому випадку зі збереженням енергії й моменту за умови  $\mu = m/2$  маємо

$$r_0 = \sqrt{\frac{m\alpha + M^2}{mE}}.$$

За умови  $\alpha > 0$  (потенціал відштовхування) рух завжди інфінітний та існує тільки найменша відстань від центру  $r_0$ .

Якщо  $\alpha < 0$  (потенціал притягання), то можливі такі випадки:

1) при  $E > 0, M^2 > m|\alpha|$  рух також інфінітний і існує найменша відстань наближення до центру  $r_0$ . Коли ж  $E > 0, M^2 < m|\alpha|$ , то рівняння для  $r_0$  не має розв'язку, тобто немає ні найбільшої, ні найменшої відстаней до центру. У цьому випадку точка або прямує до нескінченності, або «падає» у початок координат (залежно від напрямку швидкості в початковий момент часу) за кінцевий час по специфічній спіралі (див. нижче).

2) При  $E < 0$  рух можливий тільки, якщо  $M^2 < m|\alpha|$ . Існує тільки найбільша відстань від центру, а рух є фінітним. Точка також «падає» у центр потенціалу при будь-яких початкових умовах, але при  $r(t=0) < r_0(E, M)$ . Під час такого руху потенціальна енергія нескінченно спадає, але швидкість (і кінетична енергія) нескінченно зростає, що призводить до збереження повної енергії. Зростання швидкості компенсує спадання відстані для збереження моменту. Динаміку наведених випадків можна пояснити за допомогою фазових портретів (рис. 3.9), які описуються рівнянням

$$\dot{r} = \frac{2}{\sqrt{m}} \sqrt{E - \frac{m\alpha + M^2}{mr^2}}.$$

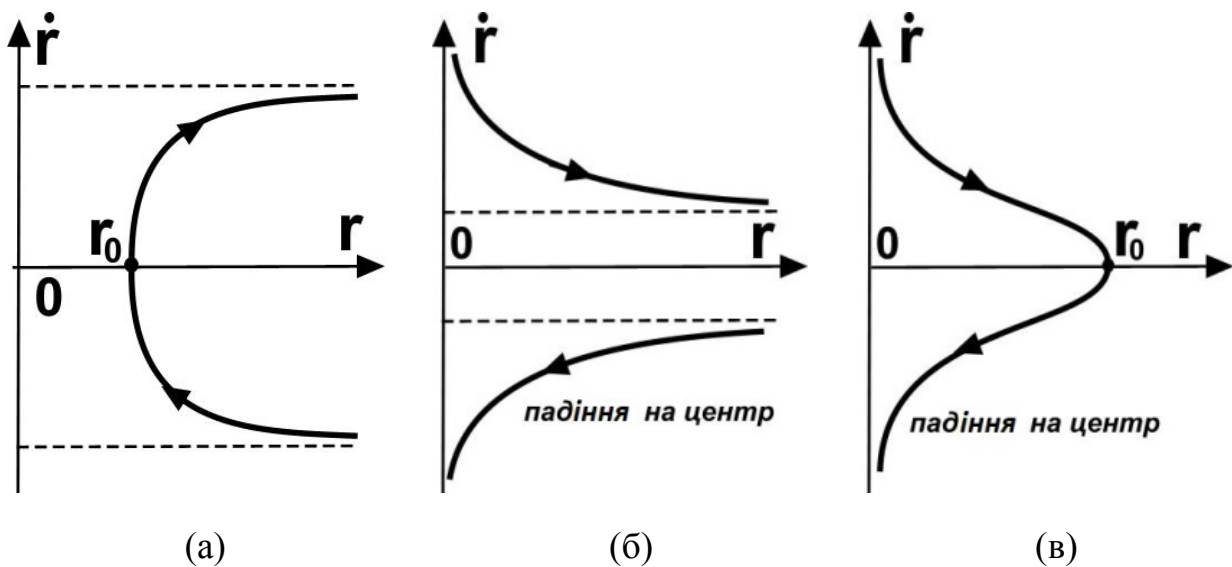


Рис. 3.9. Траєкторія частинки на фазовій площині  $(r, \dot{r})$  у випадках  
 (а) –  $\alpha > 0, E > 0$  або  $\alpha < 0, E > 0, M^2 > m|\alpha|$ ;  
 (б) –  $\alpha < 0, E > 0, M^2 < m|\alpha|$ ; (в) –  $\alpha < 0, E < 0, M^2 > m|\alpha|$ .

**3.3.5.3.** У розглянутому потенціалі відштовхування рух завжди фінітний, а найближча відстань до центру  $r_0(E, M)$  визначається рівнянням

$$\frac{M^2}{mr_0^2} + \frac{1}{r_0^4} = E$$

і дорівнює

$$r_0 = \sqrt{\frac{M^2 + \sqrt{M^2 + 4m^2 E}}{2mE}}.$$

**3.3.5.4.** Для визначення граничних відстаней  $r_0$  від центру поля скористаємося рівнянням

$$2Er_0^2 = M^2 + 1 - r_0,$$

з якого випливають значення

$$r_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8E(M^2 + 1)}}{4E}.$$

Із цього виразу видно існування критичного значення енергії  $E = E_0 = -1/[8(M^2 + 1)]$ . При додатних енергіях  $E > 0$  рух інфінітний і існує тільки найменша відстань (знак «+» у формулі). При  $E_0 < E < 0$  рух є фінітним і відстань до центру змінюється в інтервалі  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ , обумовленому різними знаками у формулі.

**3.3.5.5.** Інтервал відстаней до центру поля визначається рівнянням для граничних значень  $r_0$

$$\frac{M^2}{2r_0^2} + \frac{1}{2r_0^2} + \frac{r_0^2}{2} = E,$$

звідки

$$r_0 = \sqrt{E \pm \sqrt{E^2 - (M^2 + 1)}}.$$

Рух завжди фінітний, а  $E > \sqrt{M^2 + 1}$ .

**3.3.5.6.** Рух інфінітний, повна енергія додатна  $E > 0$ ,  $r_0 = r_{\min} = \sqrt{(1 + M^2)/2E}$  (див. розв'язок задачі 3.3.5.2). Відповідно до рівняння (3.25)

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2E}} \int \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \sqrt{r^2 - r_0^2}$$

звідки

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + 2E(t - t_0)^2}.$$

Підставляючи це рішення у формулу (3.26) і взявши інтеграл знаходимо

$$\varphi(t) = \frac{M}{\sqrt{1 + M^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2E}(t - t_0)}{r_0}.$$

Ці дві формули повністю описують динаміку розсіювання частинки. Форма траєкторії описується формулою (3.27), з якої маємо

$$\varphi(r) = \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} \arccos\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

або

$$r = \frac{r_0}{\cos\left(\frac{\sqrt{1+M^2}\varphi}{M}\right)}. \quad (3.51)$$

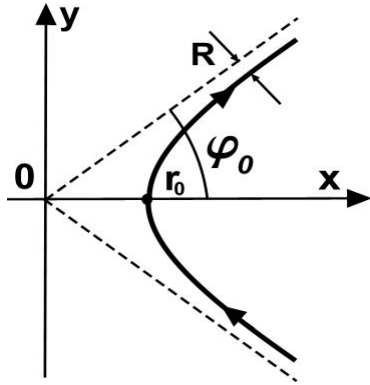


Рис. 3.10. Динаміка розсіювання частинки

Графік траєкторії руху наведений на рис. 3.10. З формули (3.51) видно, що кут між напрямком частинки, що нашоувхується, та відбитої частинки дорівнює  $2\varphi_0 = \pi M / \sqrt{1+M^2}$ . Відстань між лінією, уздовж якої летить частинка на нескінченній відстані від силового центра, і паралельною до неї лінією, яка проходить через силовий центр (прицільна відстань), дорівнює  $R = M / \sqrt{2E}$  та походить з визначення моменту  $M = \mu V_\infty R$ . З наведених формул отримуємо

$$R^2 = \frac{2}{E} \frac{\varphi_0^2}{\pi^2 - 4\varphi_0^2}.$$

### 3.3.5.7. Ця система частково розглянута в задачі 3.3.5.2.

Якщо  $E > 0$ ,  $M > 1$ , то рух інфінітний, а мінімальна відстань до силового центра дорівнює  $r_0 = \sqrt{(M^2 - 1)/2E}$  (рис. 3.4(a)). Розв'язок (3.25) має вигляд

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{\sqrt{2E}}; \quad r(t) = \sqrt{r_0^2 + 2E(t - t_0)^2}.$$

З (3.26) та (3.27) маємо

$$\varphi(t) = \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2E}(t - t_0)}{r_0}; \quad r = \frac{r_0}{\cos\left(\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \varphi\right)}.$$

Більш цікаві випадки, в яких відбувається «падіння на центр». Якщо  $E > 0$ ,  $M < 1$ , то рух інфінітний, але допускається падіння на центр. Розв'язок для  $r(t)$  перетвориться у такий спосіб

$$r(t) = \sqrt{2\sqrt{1 - M^2} |t| + 2Et^2}.$$



Обраний часовий інтервал  $t < 0$ . Константа інтегрування така, що частинка падає на центр у момент часу  $t = 0$ . Якщо в початковий момент часу частинка перебувала на відстані  $r(0)$  від центру, то вона потрапить у нього за кінцевий час

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2E}} \left( \sqrt{r^2(0) + r_*^2} - r_* \right),$$

де  $r_* = \sqrt{(1 - M^2)/2E}$ .

З формули (3.26) маємо часову залежність для азимутального кута

$$\varphi(t) = \frac{M}{\sqrt{1 - M^2}} \operatorname{Arcth} \left( 1 - \frac{\sqrt{2Et}}{r_*} \right),$$

а з (3.27) – вираз для траєкторії частинки

$$r(\varphi) = \frac{r_*}{\operatorname{sh} \left[ \frac{\sqrt{1 - M^2}}{M} (\varphi - \varphi_0) \right]}.$$

В граничному випадку  $r \rightarrow 0$  ( $\varphi \rightarrow \infty$ ) траєкторія частинки має вигляд *логарифмічної спіралі*

$$r(\varphi) \rightarrow r_* \exp \left( -\frac{\sqrt{1 - M^2}}{M} \varphi \right).$$

Якщо  $E < 0$ ,  $M < 1$ , то рух фінітний. Існує максимальна відстань, на яку частинка може віддалитися від центра поля  $r_m = \sqrt{(M^2 - 1)/2E}$ . Часова залежність відстані частинки від центру має вигляд

$$r(t) = \sqrt{r_m^2 - 2|E|(t - t_0)^2},$$

де  $t_0 = \sqrt{(r_m^2 - r^2)/2|E|}$ ,  $r(0)$  – відстань у початковий момент часу. Частинка впаде на центр за час

$$\Delta t = \left( \frac{\sqrt{1 - M^2}}{2|E|} \right) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2(0)}{r_m^2}} \right).$$

Часова залежність азимутального кута та рівняння траєкторії

$$\varphi(t) = \frac{M}{\sqrt{1-M^2}} \operatorname{Arcth} \left( \frac{\sqrt{2|E|}(t-t_0)}{r_m} \right); \quad r(\varphi) = \frac{r_m}{\operatorname{ch} \left[ \frac{\sqrt{1-M^2}}{M} (\varphi - \varphi_0) \right]}.$$

**3.3.5.8.** Задача описує рух у притягальному кулонівському полі з урахуванням додаткового відштовхування на коротких відстанях. Однак при його врахуванні у вигляді доданка  $\delta U = 1/2r^2$  задача зводиться до відомої задачі з кеплеровським потенціалом [12 : 51], але із заміною констант. Залежно від величини енергії частинка рухається по еліпсу, якщо  $-1/[8(M^2 + 1)] < E < 0$  або по гіперболі, якщо  $E > 0$ , що описуються одною формулою

$$\frac{2\sqrt{M^2 + 1}}{r} = 1 + \sqrt{8E(M^2 + 1) + 1} \cdot \cos \left[ \frac{\sqrt{M^2 + 1}}{M} (\varphi - \varphi_0) \right]. \quad (3.52)$$

Залежності  $r(t)$  при цьому (у неявній формі) описуються різними формулами. В інтервалі енергій  $-1/[8(M^2 + 1)] < E < 0$  рух фінітний і

$$t - t_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}|E|^{3/2}} \left\{ \arcsin \frac{4|E|r - 1}{\sqrt{1 - 8|E|(M^2 + 1)}} - \sqrt{1 - 8|E|(M^2 + 1) - (4|E|r - 1)^2} \right\}.$$

При  $E > 0$  рух інфінітний і описується формулою

$$t - t_0 = -\frac{1}{4\sqrt{2}E^{3/2}} \left\{ \operatorname{Arch} \frac{4Er + 1}{\sqrt{1 + 8E(M^2 + 1)}} - \sqrt{(4Er + 1)^2 - [1 + 8E(M^2 + 1)]} \right\}.$$

**3.3.5.9.** У цьому прикладі ефективний потенціал має вигляд  $U_{\text{eff}} = r^2/2 + (1 + M^2)/2r^2$  з мінімумом  $U_{\text{min}} = \sqrt{1 + M^2}$  на відстані  $r_0 = \sqrt[4]{1 + M^2}$  від центру поля. Рух завжди фінітний з  $E > E_0 = \sqrt{1 + M^2}$ . Залежність відстані від часу виходить з формули (3.25)

$$r = \sqrt{E - \sqrt{E^2 - E_0^2} \sin[2(t - t_0)]}.$$

Вид траєкторії знаходимо за формулою (3.27)

$$r = \frac{E_0}{\sqrt{E + \sqrt{E^2 - E_0^2} \cos(2E_0\varphi/M)}}.$$

Траєкторія є незамкненою кривою. Частинка обертається між значеннями відстані до центра  $r_{\min} = \sqrt{E - \sqrt{E^2 - E_0^2}}$  та  $r_{\max} = \sqrt{E}$ . Якщо взяти чисто гармонічний потенціал  $U = r^2/2$ , то в отриманих формулах  $E_0 \rightarrow M$  і розв'язок матиме вигляд

$$r = \frac{M}{\sqrt{E + \sqrt{E^2 - M^2} \cos(2\varphi)}}. \quad (3.53)$$

Формула (3.53) – це рівняння еліпсу з осями  $r_{\pm} = M / \sqrt{E \pm \sqrt{E^2 - M^2}}$  та з центром на початку координат (не у фокусі еліпсу). Нагадаємо, що цей гармонічний потенціал і потенціал Кеплера вичерпують можливі радіально симетричні потенціали, в яких всі траєкторії руху частинок є замкненими.

**3.3.5.10.** У цій задачі в загальному випадку довільного числа  $n$  рівняння (3.25) – (3.27) не інтегруються в елементарних функціях, але можна проаналізувати асимптотичне поведіння матеріальної точки при її падінні на центр. Якщо точка досягає центра у момент  $t = 0$ , то в цьому граничному випадку  $r \rightarrow 0$  межі в (3.25) можна залишити основний доданок у знаменнику

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{1/r^n}} \sim r^{n/2+1}; \quad r \sim t^{2/(n+2)}.$$

З формули (3.26) для моменту імпульсу, який зберігається маємо

$$\varphi = \int \frac{Mdt}{r^2} \sim \int t^{-4/(n+2)} dt \sim t^{(n-2)/(n+2)}.$$

Отже, асимптотично траєкторія має вигляд спіралі

$$r \sim \varphi^{2/(n-2)}.$$

**3.3.6.1.** У лабораторній системі із закону збереження імпульсу  $\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$  та закону збереження енергії при однакових масах  $p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2$

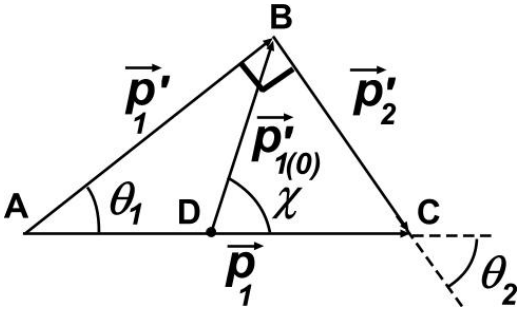


Рис. 3.11. Розсіювання частинок з однаковими масами

З умови прямолінійності кута  $\angle ABC$  та рівності відрізків  $AD = DC$  виходить, що відрізки  $AD$  і  $DB$  також рівні (покажіть це). Отже,

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}. \quad (3.54)$$

**3.3.6.2.** В задачі 3.3.5.6 для цього потенціалу отримана часова залежність кутової змінної в системі відліку центра інерції

$$\varphi(t) = \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} \arctg \left[ \frac{\sqrt{2E}(t-t_0)}{r_0} \right]; \quad r_0 = r_{\min} = \sqrt{\frac{(1+M^2)}{2E}}.$$

Якщо взяти значення константи інтегрування  $t_0 = 0$  та асимптотику при  $t \rightarrow \infty$ , то отримаємо значення  $\varphi_0 = \pi M / 2\sqrt{1+M^2}$ . Оскільки повний кут розсіювання  $\chi = \pi - 2\varphi_0$ , то за формулами (3.54) задачі 3.3.6.1 маємо

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} \right); \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} \frac{M}{\sqrt{1+M^2}}.$$

**3.3.6.3.** Для цього потенціалу розв'язання в системі центра інерції отримано в задачі 3.3.5.8 (див. ф-лу (3.52)) і має вигляд

$$\frac{2\sqrt{M^2+1}}{r} = 1 + \sqrt{8E(M^2+1)+1} \cdot \cos \left( \frac{\sqrt{M^2+1}}{M} \varphi \right).$$

Константа інтегрування обрана так, що при  $\varphi = 0$  частинка досягає мінімальної відстані до центру  $r_{\min} = 1 + \sqrt{8E(M^2+1)+1}$ . Максимальний кут відхилення  $\varphi_{\max}$  при  $r \rightarrow \infty$  дорівнює

$$\varphi_{\max} = \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} \left\{ \pi - \arccos \left[ \frac{1}{\sqrt{8E(M^2+1)+1}} \right] \right\}.$$

Звідси

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 = \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} \left\{ \pi - \arccos \left[ \frac{1}{\sqrt{8E(M^2+1)+1}} \right] \right\}.$$

**3.3.6.4.** При обраній константі взаємодії й значеннях має розв'язок в системі центра інерції має вигляд ([12 : 51])

$$\frac{2M^2}{r} = -1 + \sqrt{1+8EM^2} \cos \varphi.$$

Звідси  $\varphi_0 = \arccos(1/\sqrt{1+8EM^2})$  та остаточно

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+8EM^2}}.$$

**3.3.6.5.** Скориставшись результатом задачі 3.3.6.2 для кута розсіювання в системі центра інерції

$$\chi = \pi - \frac{\pi M}{\sqrt{1+M^2}}$$

та зв'язком  $M = 2\rho\sqrt{E}$  знаходимо залежність  $\rho = \rho(\chi)$

$$\rho = \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\pi - \chi}{\sqrt{\pi^2 - (\pi - \chi)^2}}.$$

Вона визначає залежність перетину розсіювання в системі центра інерції

$$d\sigma = \frac{\pi^3}{2E} \frac{(\pi - \chi)d\chi}{\chi^2(\pi - \chi)^2} = \frac{\pi^2}{4E} \frac{(\pi - \chi)d\chi}{\chi^2 \sin \chi (2\pi - \chi)^2}.$$

В лабораторній системі ці формули переписуються у такий спосіб

$$d\sigma_1 = \frac{\pi^3}{16E} \frac{(\pi - 2\theta_1)d\theta_1}{\theta_1^2(\pi - \theta_1)^2} = \frac{\pi^2}{32E} \frac{(\pi - 2\theta_1)d\theta_1}{\theta_1^2 \sin^2(\pi - \theta_1)^2 \sin \theta_1},$$

$$d\sigma_2 = \frac{2\pi^3}{E} \frac{\theta_2 d\theta_2}{(\pi^2 - 4\theta_2^2)^2} = \frac{\pi^2}{E} \frac{\theta_2 d\theta_2}{(\pi^2 - 4\theta_2^2)^2 \sin \theta_2}.$$

Графіки перетинів розсіювання для частинок, які наштовхуються та які розсіюють наведені на рис. 3.12(а) та рис. 3.12(б). Якщо частинки не тільки мають однакові маси, але й не відрізняються, то повний перетин всіх частинок являє собою суму двох перетинів і наведений на рис. 3.12(в).

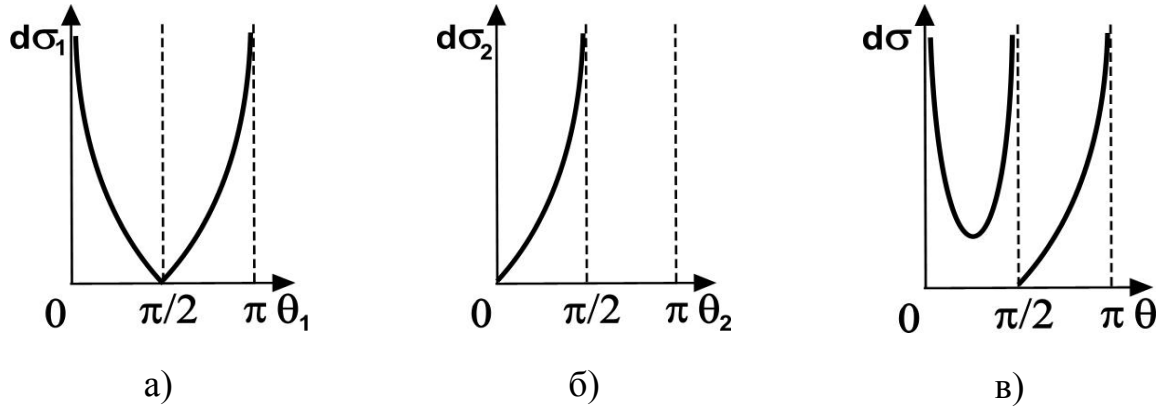


Рис. 3.12. Залежність диференціального перетину розсіювання частинок, які наштовхуються (а), які розсіюють (б), повний перетин розсіювання одна на одній частинки, які не відрізняються (в)

**3.4.1.1.** Оскільки час не зачіпається перетворенням координат, із закону їхнього перетворення походить перетворення швидкостей і прискорень

$$\dot{x} = \dot{\xi} + \dot{\eta}, \quad \dot{y} = -2\dot{\eta}; \quad \ddot{x} = \ddot{\xi} + \ddot{\eta}, \quad \ddot{y} = -2\ddot{\eta}.$$

Підставляючи вираз для перетворення швидкостей у вихідну функцію Лагранжа отримаємо в новій системі координат нову функцію Лагранжа

$$\tilde{L}(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) = \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2 - \xi^2 - \eta^2 - 2\xi\eta + 2\eta.$$

Рівняння Ейлера–Лагранжа у вихідній системі мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \Rightarrow, \quad 2\ddot{x} + \ddot{y} + 2x = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \Rightarrow, \quad \ddot{x} + 1 = 0,$$

а в перетвореній системі координат виглядають так

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \xi} = 0, \quad \Rightarrow, \quad \ddot{\xi} + \xi + \eta = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \eta} = 0, \quad \Rightarrow, \quad \ddot{\eta} - \xi - \eta + 1 = 0.$$

Для того, щоб переконатися в їхній еквівалентності підставимо в першу пару рівняння зв'язок між координатами й прискореннями у вихідній і перетвореній системах. Тоді перше рівняння і їхня різниця з першої пари співпадуть з рівняннями другої пари. Отже, перетворення координат у лагранжіані призводить до еквівалентних рівнянь динаміки.

**3.4.1.2.** Перетворення зручно провести у два етапи. Оскільки екстремум потенціальної енергії (сідло) знаходиться в точці  $x = 0$ ,  $y = 2$ , то після заміни  $y = 2 + \tilde{y}$  отримаємо лагранжіан  $L = 2\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{\tilde{y}} - x\tilde{y}$ . Проведемо поворот системи координат  $(x, \tilde{y})$  на кут  $\alpha$  до нової системи  $(\xi, \eta)$

$$x = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha; \quad \tilde{y} = \eta \cos \alpha - \xi \sin \alpha.$$

При значенні  $\alpha = \pi/4$  маємо

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \xi); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi) + 2. \quad (3.55)$$

Потенціальна енергія діагоналізується, але кінетична енергія залишається недіагональною

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\dot{\eta}^2 - \dot{\xi}^2) + (\dot{\eta} + \dot{\xi})^2 - \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2).$$

Рівняння руху у двох системах координат мають вигляд

$$\begin{cases} 4\ddot{x} + \ddot{y} + y - 2 = 0; \\ \ddot{x} + x = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

та

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + 2\ddot{\eta} - \xi = 0; \\ 2\ddot{\xi} + 3\ddot{\eta} + \eta = 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

відповідно.

Підстановка в рівняння (3.56) співвідношень (3.55) переводить їх у рівняння (3.57).

**3.4.2.1.** Функція Лагранжа, розглянута в цій задачі, відповідає релятивістській частинці, для якої перший доданок – енергія спокою та кінетична енергія, а другий – залежна від часу потенціальна енергія. Розглянуті ж перетворення можна переписати у вигляді

$$x = \frac{q - V\tau}{\sqrt{1 - V^2}}; \quad t = \frac{\tau - Vq}{\sqrt{1 - V^2}},$$

тобто вони являють собою перетворення Лоренца для системи, що рухається зі швидкістю  $V = 3/5$  (швидкість світла тут дорівнює одиниці). Як ми переконаємося, вони залишають інваріантним перший доданок у функції Лагранжа, що є наслідком інваріантності інтервалу стосовно перетворень Лоренца. З того, що дія повинна зберігатися при перетвореннях координат та часу виходить, що нова функція Лагранжа повинна бути зв'язана зі старою співвідношенням  $\tilde{L}(q_\tau, q, \tau) d\tau = L(x_t, x, t) dt$ . Оскільки  $x = x(q, \tau)$  та  $t = t(q, \tau)$ , то для зв'язку старої та нової швидкостей отримуємо

$$x_t = \frac{dx}{dt} = \frac{x_q dq + x_\tau d\tau}{t_q dq + t_\tau d\tau} = \frac{x_q q_\tau + x_\tau}{t_q q_\tau + t_\tau} = \frac{q_\tau - V}{1 - V q_\tau} = \frac{5q_\tau - 3}{5 - 3q_\tau}. \quad (3.58)$$

З огляду на те, що

$$dt = t_q dq + t_\tau d\tau = (t_q q_\tau + t_\tau) d\tau = \frac{(1 - V q_\tau) d\tau}{\sqrt{1 - V^2}}$$

знаходимо вигляд нової функції Лагранжа

$$\tilde{L}(q_\tau, q, \tau) = -\sqrt{1 - q_\tau^2} + \frac{(5 - 3q_\tau)(q - 7\tau)^2}{64}.$$

Знаходячи за звичайними правилами механіки динамічні рівняння, які відповідають лагранжіанам в старих та нових змінних отримуємо

$$\frac{x_{tt}}{(1 - x_t^2)^{3/2}} - 2(x + 2t) = 0 \quad (3.59)$$

та

$$\frac{q_{\tau\tau}}{(1 - q_\tau^2)^{3/2}} + \frac{q - 7\tau}{2} = 0 \quad (3.60)$$

відповідно.

Враховуючи, що  $x_t = (q_\tau - V)/(1 - V q_\tau)$  для порівняння отриманих рівнянь знаходимо вираз для  $x_{tt}$

$$x_{tt} = \frac{dx_t}{dt} = \frac{(\partial x_t / \partial q_\tau) dq_\tau}{t_q dq + t_\tau d\tau} = \frac{(\partial x_t / \partial q_\tau) q_{\tau\tau} d\tau}{t_q dq + t_\tau d\tau} = \frac{(\partial x_t / \partial q_\tau) q_{\tau\tau}}{t_q q_\tau + t_\tau} = \frac{(1 - V^2)^{3/2} q_{\tau\tau}}{(1 - V q_\tau)^3}.$$

Підставляючи вирази для  $x_t$  та  $x_{tt}$  в рівняння (3.59) отримуємо рівняння (3.60).



Зауважимо, що «прискорення», тобто перший доданок у рівняннях руху залишається інваріантним при перетвореннях Лоренца, на відміну від похідної за часом від швидкості.

**3.4.2.2.** Оскільки  $dx = \tau dq + q d\tau$  та  $dt = dq$ , то  $dx/dt = \tau + q/q_\tau$ . При цьому  $dt/d\tau = q_\tau$ ,  $dx/d\tau = q + q_\tau \tau$  та  $dx_i/d\tau = 2 - q_{\tau\tau}q/q_\tau^2$ . Отже, функція Лагранжа  $L(x_i, \dot{x}, t)$  перетвориться так

$$\tilde{L}(q_\tau, q, \tau) = L\left(\tau + \frac{q}{q_\tau}, q\tau, q\right) q_\tau.$$

Запишемо рівняння руху в нових координатах. Для цього обчислимо необхідні похідні

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial x_i} + q_\tau \tau \frac{\partial L}{\partial x} + q_\tau \frac{\partial L}{\partial t};$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\tau} = p = -\frac{q}{q_\tau} \frac{\partial L}{\partial x_i} + L.$$

Динамічне рівняння в нових координатах має вигляд

$$\frac{dp}{d\tau} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = \left( \frac{dL}{d\tau} - \left(1 - \frac{q_{\tau\tau}q}{q_\tau^2}\right) \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{q}{q_\tau} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} + q_\tau \tau \frac{\partial L}{\partial x} + q_\tau \frac{\partial L}{\partial t} \right). \quad (3.61)$$

Підставляючи в вираз (3.61)

$$\frac{dL}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \left( 2 - \frac{q_{\tau\tau}q}{q_\tau^2} \right) + \frac{\partial L}{\partial x} (q + q_\tau \tau) + \frac{\partial L}{\partial t} q_\tau;$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial x_i} = q_\tau \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

отримуємо

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\tau} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = -q \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0.$$

Так, рівняння руху у двох системах змінних еквівалентні.

**3.4.3.1.** Місце кріплення пружини знаходиться в точці  $x = z(t) = A \sin \Omega t$ . Тому в лабораторній системі відліку функція Лагранжа записується так

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} (x - A \sin \Omega t - l)^2.$$

Рівняння динаміки має вигляд

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - l) = A\omega_0^2 \sin \Omega t$$

і має розв'язок на частоті примусової сили

$$x = l + A \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin \Omega t.$$

У неінерціальній системі відліку, яка рухається разом із точкою закріплення пружини швидкість осцилятора  $\dot{x}' = \dot{x} - V(t) = \dot{x} - A\Omega \cos \Omega t$ . Згідно (3.34) лагранжیان у цій системі має вигляд

$$\begin{aligned} L' &= \frac{m}{2} \dot{x}'^2 - mx' \frac{dV}{dt} - \frac{k}{2} \left( x' + \int V dt - A \sin \Omega t - l \right)^2 = \\ &= \frac{m}{2} \dot{x}'^2 + mx' A \Omega^2 \sin \Omega t - \frac{k}{2} (x' - l)^2, \end{aligned}$$

а рівняння руху

$$\ddot{x}' + \omega_0^2(x' - l) = A\Omega^2 \sin \Omega t$$

має розв'язок

$$x' = l + A \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin \Omega t.$$

Отже, співвідношення амплітуд коливання осцилятора в двох системах дорівнює

$$\frac{a_{lab}}{a_{ne}} = \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2.$$

**3.4.3.2.** Задачу зручно розв'язувати в неінерціальній системі, пов'язаній з вільним падінням точки почепу, в якій маятник вільно обертається через брак зовнішніх сил за законом

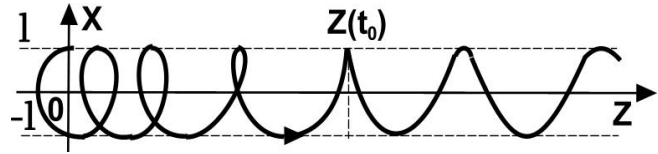
$$x' = l \cos \Omega t; \quad z' = -l \sin \Omega t.$$

В лабораторній системі координати осцилятора перетворюються у такий спосіб:

$$x = l \cos \Omega t; \quad z = -l \sin \Omega t + \frac{gt^2}{2}.$$

Ці формули в параметричному вигляді задають траєкторію руху осцилятора, яку можна переписати у вигляді

$$z = -\sqrt{l^2 - x^2} + \frac{g}{2\Omega^2} \left[ \arccos\left(\frac{x}{l}\right) \right]^2.$$



Вона зображена на рис. 3.13.  
На початку падіння швидкість маятника

$$\dot{z} = -l\Omega \cos\Omega t + gt$$

Рис. 3.13. Траєкторія вільного падіння обертового математичного маятника в лабораторній системі відліку

поблизу значень фази обертання  $\Omega t = 2\pi n$  спрямована вгору та змінює знак. Падіння стає монотонним

$$t_0 \approx \frac{1}{\Omega} \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2.$$

**3.4.3.3.** Скористаємося рівнянням (3.37), залишивши в правій частині тільки силу Коріоліса та потенціальну силу тяжіння Землі

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = 2m [\vec{v}, \vec{\Omega}] - m g \vec{n}_z,$$

де  $\vec{n}_z$  – одиничний вектор нормалі до поверхні Землі уздовж осі  $z$ . В нульовому наближенні можна покласти  $R/r = 1$  в силі тяжіння в правій частині рівняння. Оскільки відхилення від вертикальної осі істотно менше висоти падіння, то скористаємося теорією збурень, підставивши в праву частину розв'язки рівняння Ньютона без урахування сили Коріоліса:

$$\vec{r}_0 = z \vec{n}_z = \left( R + h - \frac{gt^2}{2} \right) \vec{n}_z;$$

$$\vec{v}_0 = \dot{z} \vec{n}_z = -gt \vec{n}_z.$$

Введемо систему координат, в якій вісь  $Ox$  із ортом  $\vec{n}_x$  спрямована на південь, а вісь  $Oy$  із ортом  $\vec{n}_y$  – на схід. При цьому  $y$ -компонента динамічного рівняння набуває вигляду

$$\dot{v}_y = 2v_{0z}\Omega_x = -2gt\Omega_x.$$



з  $g$  – прискоренням сили тяжіння, переписавши його в локальній системі координат на поверхні Землі. Систему координат виберемо у такий спосіб: її центр помістимо в точку  $O$ , де лінія підвісу довжиною  $h$  торкається поверхні в точці  $A$ . Вісь  $Ox$  із ортом  $\vec{n}_x$  спрямована на південь, вісь  $Oy$  із ортом  $\vec{n}_y$  – на схід, а вісь  $Oz$  із ортом  $\vec{n}_z$  уздовж осі підвісу, що не збігається з напрямком сили тяжіння в цій точці (див. рис. 3.14).

Уявивши координату матеріальної точки у вигляді  $\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$ , де  $\vec{R}$  – радіус-вектор центра зазначеної системи координат на поверхні,  $\vec{\rho} = (x, y, z)$  – координата точки в ній, тобто  $r^2 = (R + z)^2 + y^2 + x^2$ . Перепишемо рівняння в лінійному наближенні за малими відхиленнями  $\rho$  від початку координат у вигляді

$$\ddot{\vec{\rho}} = -g \frac{\vec{R}}{R} + \left[ \vec{\Omega}, [\vec{R}, \vec{\Omega}] \right] + 2 \left[ \vec{v}, \vec{\Omega} \right] + \left[ \vec{\Omega}, [\vec{\rho}, \vec{\Omega}] \right] - g \left( \frac{\vec{\rho}}{R} - 3\vec{R} \frac{(\vec{\rho}, \vec{R})}{R^3} \right), \quad (3.62)$$

де перші два доданки відповідають на рис. 3.14 силі тяжіння  $\vec{f}_g$  та відцентровій силі  $\vec{f}_c$  в точці  $O$ , тобто силі  $\vec{f}_*$  натягу нитки, третій доданок – силі Коріоліса, четвертий – додатковій відцентровій силі, а останній доданок – залежній від координати додатковій силі тяжіння.

У задачі виникають два малих параметри

$$\varepsilon_1 = \frac{R\Omega^2}{g}; \quad \varepsilon_2 = \frac{h}{R}.$$

Перший з них визначає відношення кінетичної енергії на поверхні Землі до її потенціальної енергії  $T/U = \varepsilon_1 \cos^2(\theta/2)$  та приблизно дорівнює  $\varepsilon_1 \approx 0.35 \cdot 10^{-2}$ . Другий залежить від висоти падіння. Для висоти  $h = 40$  м дорівнює  $\varepsilon_2 \approx 0.6 \cdot 10^{-5}$ . Так, для зазначеної висоти падіння  $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_1^2$ . Наведені рівняння містять низку доданків з різними ступенями цих малих параметрів. Як буде показано нижче, в головному наближенні зміни координат мають такі порядки величин:  $\Delta z \sim h$ ,  $\Delta y \sim h\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \ll \Delta z$ ,  $\Delta x \sim h\varepsilon_1\varepsilon_2 \ll \Delta y$ . Час падіння дорівнює  $\tau \approx \sqrt{2h/g}$ . Пов'язаний з ним безрозмірний параметр має порядок величини  $\Omega\tau \sim \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ , тому розв'язок шукаємо також у вигляді розкладання в ряд  $\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2 + \dots$ . З рис. 3.14 видно, що

$$\vec{R} = R(\sin \alpha, 0, \cos \alpha); \quad \vec{\Omega} = \Omega(-\cos \psi, 0, \sin \psi),$$

де  $\psi = \vartheta + \alpha$ ,  $\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\vartheta/(1 - \varepsilon_1)$ . В рівняннях (3.62) виникає малий параметр – кут

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_1 \sin \vartheta \cos \vartheta}{1 - \varepsilon_1 \cos^2 \vartheta}\right) \sim \varepsilon_1.$$

В нульовому наближенні рівняння (3.62) набудуть вигляду

$$\ddot{z} \approx -g + O(g\varepsilon_1);$$

$$\ddot{y} \approx -2\dot{z}\Omega \cos \vartheta + O(g\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2});$$

$$\ddot{x} \approx 2\dot{y}\Omega \sin \vartheta + 4z\Omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + O(g\varepsilon_1^2\varepsilon_2)$$

з такими розв'язками

$$z \approx h - \frac{gt^2}{2}; \quad y \approx \frac{gt^3}{3}\Omega \cos \vartheta; \quad x \approx 2ht^2\Omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Звідси видно, що траєкторія падіння частинки  $x \approx 4(h - z)\varepsilon_1\varepsilon_2 \sin \vartheta \cos \vartheta$  приблизно прямолінійна (жирна лінія **АВ** на рис. 3.14). Оскільки в головному наближенні час падіння  $\tau \approx \sqrt{2h/g}$ , то зсуви в різних напрямках падаючої частинки від положення підвісу на Землі становлять

$$\Delta y \approx \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\Omega \cos \vartheta = h\frac{2}{3}\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2} \cos \vartheta;$$

$$\Delta x \approx \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\Omega \cos \vartheta = h\frac{2}{3}\sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2} \cos \vartheta.$$

**3.4.4.1.** Виберемо в якості вихідної – нерухомої координатну систему з координатами матеріальних точок  $\vec{r}(x, y, z)$ . В якості перетворення координат виберемо перехід у систему, яка обертається відносно вихідної системи координат навколо вісі  $Oz$  з кутовою швидкістю  $\Omega$ . Координати цієї системи  $\vec{r}(u, v, w)$  пов'язані з вихідними координатами через співвідношення

$$x = u - \Omega t v, \quad y = v + \Omega t u, \quad z = w.$$

Скориставшись формулами (3.41), (3.43), знаходимо

$$p_u = p_x + \Omega t p_y; \quad p_v = -\Omega t p_x + p_y; \quad p_w = p_z;$$

$$E_{uvw} = E_{xyz} + p_x \Omega v - p_y \Omega u = E_{xyz} - (\vec{\Omega}, \vec{M}).$$

Остання залежність збігається з відомим співвідношенням [12:166].

**3.4.4.2.** Оскільки час не змінено перетворенням, функція Лагранжа в «нових» змінних має вигляд

$$\tilde{L}(u, \mathbf{v}, \dot{u}, \dot{\mathbf{v}}, t) = L(u - t\mathbf{v}, 2tu\mathbf{v}, \dot{u} - \mathbf{v} - t\dot{\mathbf{v}}, 2u\mathbf{v} + 2t\dot{u}\mathbf{v} + 2tu\dot{\mathbf{v}}, t).$$

Для нових імпульсів знаходимо такі співвідношення

$$p_u = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + 2t\mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = p_x + p_y 2t\mathbf{v},$$

$$p_v = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}} = -t \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + 2tu \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -tp_x + p_y 2tu.$$

Тут, в «старих» імпульсах  $p_x, p_y$  мається на увазі заміна змінних. Для того, щоб знайти перетворення енергії знайдемо спочатку зв'язок швидкостей, користуючись законом перетворення координат

$$\dot{x} = \dot{u} - t\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}, \quad \dot{y} = 2t\dot{u}\mathbf{v} + 2tu\dot{\mathbf{v}} + 2u\mathbf{v}.$$

Для енергії в системі координат  $(u, \mathbf{v})$  знаходимо

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{uv} &= \dot{u}p_u + \dot{\mathbf{v}}p_v - \tilde{L} = \dot{u}(p_x + 2t\mathbf{v}p_y) + \dot{\mathbf{v}}(-tp_x + 2tup_y) - \tilde{L} = \\ &= p_x(\dot{u} - t\dot{\mathbf{v}}) + p_y(2t\dot{u}\mathbf{v} + 2tu\dot{\mathbf{v}}) - \tilde{L} = p_x(\dot{x} + \mathbf{v}) + p_y(\dot{y} - 2u\mathbf{v}) - \tilde{L} = \\ &= E_{xy} + \mathbf{v}p_x - 2u\mathbf{v}p_y. \end{aligned}$$

Отже, перетворення енергії не зводиться до заміни змінних.

Отримані перетворення, звичайно, можуть бути знайдені із загальних формул (3.42), (3.43).

**3.4.4.3.** Необхідно скористатися співвідношеннями (3.41), (3.43)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \mathbf{v} - 2t^2; \quad \frac{\partial x}{\partial \mathbf{v}} = u; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -4tu;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \mathbf{v}^2; \quad \frac{\partial y}{\partial \mathbf{v}} = (2u + 1)\mathbf{v}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

з яких маємо таке координатне перетворення

$$x = (v - 2t^2)u; \quad y = \left(u + \frac{1}{2}\right)v^2.$$

**3.4.4.4.** Якщо система із двома узагальненими координатами  $(u, v)$  рухається щодо системи  $(x, y)$  зі швидкістю  $V$  і перетворення координат має вигляд  $x = u + Vt$ ;  $y = v + Vt$ , то при цьому з формул (3.42), (3.43) виходить, що  $p_u = p_x$ ,  $p_v = p_y$ , а зв'язок енергій у двох системах виглядає

$$E_{uv} = E_{xy} - p_x V - p_y V = E_{xy} - VP.$$

Як відомо [12 : 30],  $E_{uv} = E_{xy} - VP - \mu V^2/2$ . Для отримання цього результату треба врахувати, що функції Лагранжа  $L_{xy}$  та  $L_{uv}$  відрізняються на константу  $\mu V^2/2$ . При цьому дія приймає однакове мінімальне значення.



## ТРИВИМІРНІ КРИВОЛІНІЙНІ КООРДИНАТИ

В розділі 2 ми розглянули простий випадок двовимірних криволінійних координат, які визначають положення точки на площині. Результати цього розділу використовувалися в розділі 3. Однак оскільки динаміка матеріальних систем відбувається в тривимірному просторі, то в багатьох задачах істотно необхідним є їхній розгляд у тривимірних криволінійних координатах. В цьому розділі наведено узагальнення результатів розділу 3 на тривимірний випадок.

### 4.1. Криволінійні координати в тривимірному просторі

У тривимірному просторі положення точки  $M$  визначається її радіус-вектором  $\vec{r} = (x, y, z)$ , який можна представити у вигляді  $\vec{r} = x\vec{i}_x + y\vec{i}_y + z\vec{i}_z$ , де  $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$  – одиничні ортогональні вектори, а  $x, y, z$  – прямокутні декартові координати точки  $M$ . Її положення можна також визначити трійкою функцій

$$q_1 = q_1(x, y, z); \quad q_2 = q_2(x, y, z); \quad q_3 = q_3(x, y, z), \quad (4.1)$$

які теж визначають радіус-вектор точки  $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$

$$x = x(q_1, q_2, q_3); \quad y = y(q_1, q_2, q_3); \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (4.2)$$

Про трійку чисел  $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$  можна говорити як про тривимірні криволінійні координати. При заданих значеннях  $q_1 = q_1^0$ ,  $q_2 = q_2^0$  та  $q_3 = q_3^0$  вони характеризують положення точки  $M$ , а співвідношення (4.1) дають три рівняння

$$q_1(x, y, z) = q_1^0; \quad q_2(x, y, z) = q_2^0; \quad q_3(x, y, z) = q_3^0, \quad (4.3)$$

які визначають три сім'ї *координатних площин* у просторі (див. рис.4.1). Лінії перетинання координатних площин задають *координатні лінії*. У кожній точці перетинаються три координатні лінії, і аналогічно тому, як у декар-

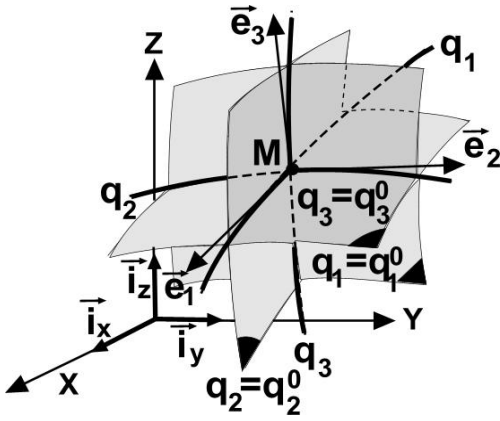


Рис. 4.1. Координатні площини, координатні лінії й одиничні вектори в тривимірних криволінійних координатах

тових координатах ми ввели одиничні ортогональні вектори  $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$  у системі криволінійних координат можна ввести одиничні вектори  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , спрямовані по дотичних до координатних ліній. У загальному випадку ці вектори можуть бути не ортогональними один одному, як у декартовій системі. Нижче ми будемо розглядати тільки так звані *ортогональні криволінійні координати*, в яких трійка векторів  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ортогональна, але по-різному орієнтована в різних точках простору. Нижче ми вибираємо наступну орієнтацію цих векторів: вектор  $\vec{e}_1$  спрямований уздовж лінії перетинання площин  $q_2 = q_2^0, q_3 = q_3^0$  перпендикулярно площини  $q_1 = q_1^0$  тощо.

Для двох сусідніх точок  $M(x, y, z)$  та  $M(x + dx, y + dy, z + dz)$  приріст радіус-вектора  $MM_1$  дорівнює  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ , тобто в декартових координатах

$$d\vec{r} = dx\vec{i}_x + dy\vec{i}_y + dz\vec{i}_z. \quad (4.4)$$

Розглядаючи  $x, y, z$  як функції  $q_1, q_2, q_3$  маємо

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3; \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3; \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3; \end{aligned} \quad (4.5)$$

або

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3. \quad (4.6)$$

Матриця похідних в (4.5) повністю визначає локальне перетворення координат. Важливу роль відіграють деякі комбінації цих величин. Як і у двовимірному випадку (див. ф-ли (2.6)–(2.9)) вводяться коефіцієнти Ламе

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad (4.7)$$

які визначають довжини векторів

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \vec{i}_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + \vec{i}_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + \vec{i}_z \frac{\partial z}{\partial q_i} = h_i \vec{e}_i \quad (4.8)$$

спрямованих по дотичних до координатних ліній  $q_i$  (див. рис.4.1).

Одиничні орти криволінійної системи координат визначаються як

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.9)$$

Помноживши вирази (4.9) скалярно на  $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$  знайдемо вирази для кутів між осями криволінійних ( $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$ ) та декартових ( $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$ ) координат

$$\cos(\vec{e}_i, \vec{i}_x) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x}{\partial q_i}; \quad \cos(\vec{e}_i, \vec{i}_y) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial y}{\partial q_i}; \quad \cos(\vec{e}_i, \vec{i}_z) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial z}{\partial q_i}; \quad (4.10)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Аналогічно двовимірному випадку, скориставшись співвідношеннями (4.5) легко визначити довжину лінійного елемента

$$dl^2 = (d\vec{r}, d\vec{r}) = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

в криволінійних координатах через фундаментальний метричний тензор

$$dl^2 = g_{ik} dq_i dq_k, \quad (4.11)$$

де

$$g_{ik} = g_{ki} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_k} = h_i h_k (\vec{e}_i, \vec{e}_k). \quad (4.12)$$

У випадку ортогональних координат недиагональні члени метричного тензора дорівнюють нулю, тому довжина лінійного елемента в криволінійних ортогональних координатах дорівнює

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2. \quad (4.13)$$

При цьому з (4.5)–(4.8) виходить, що

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3, \quad (4.14)$$

отже, елемент об'єму перетвориться так

$$dV = dx dy dz = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (4.15)$$

Наведені формули узагальнюють вирази для двовимірного випадку, отримані в розділі 2.

### Задачі до параграфу 4.1

**4.1.1.** Відомі проекції вектора  $\vec{A}$  на вісі декартової системи координат  $(A_x, A_y, A_z)$ . Знайти проекції  $(A_1, A_2, A_3)$  на вісі криволінійної координатної системи.

**4.1.2.** Виразити швидкість матеріальної точки та кінетичну енергію в декартових координатах через узагальнені швидкості, що відповідають тривимірним криволінійним координатам.

**4.1.3.** Виразити орти криволінійних координат через криволінійні координати в декартовій системі координат (через орти декартової системи координат).

**4.1.4.** Виразити орти декартових координат через криволінійні координати та орти цієї системи.

**4.1.5.** Знайти прискорення матеріальної точки в криволінійних координатах.

## 4.2. Загальні циліндричні координати

Загальні циліндричні координати утворюються із двовимірних плоских координат за допомогою приєднання декартової координати  $z$ , перпендикулярної до плоских координат. При цьому координати характеризуються симетрією щодо зсуву уздовж цієї координати  $z$ . Такі координати є ортогональними, якщо ортогональною є відповідна система плоских координат. Прикладами загальних циліндричних координат є циліндричні полярні, циліндричні еліптичні та циліндричні параболічні координати.

### 4.2.1. Циліндричні полярні координати

Циліндричні полярні (кругові) координати узагальнюють на тривимірний випадок розглянуті в § 2.2 полярні координати.

В циліндричній системі координат положення точки визначається трьома координатами  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$  пов'язаними з декартовими через співвідношення (рис. 4.2(a))

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = z. \quad (4.16)$$

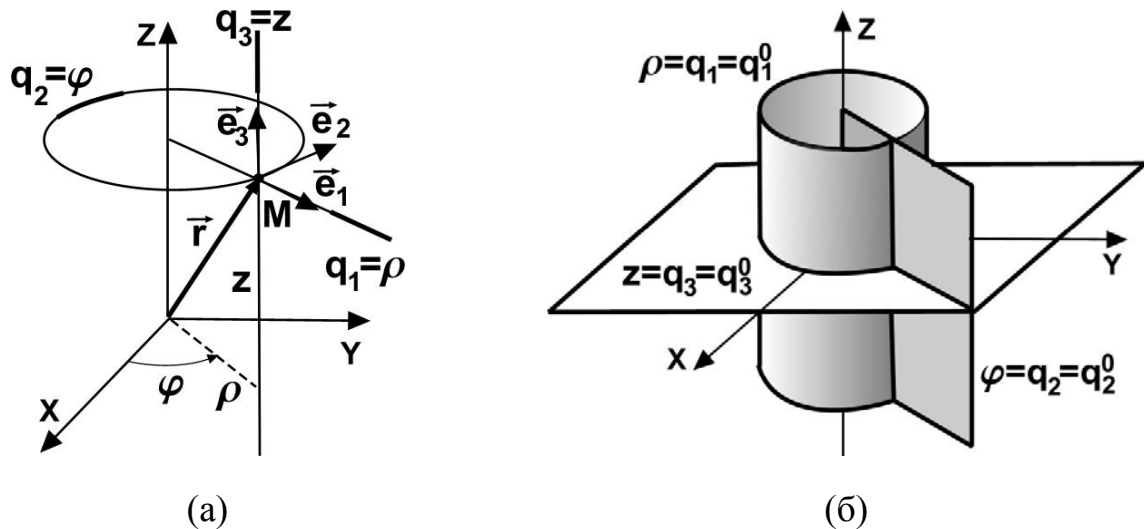


Рис. 4.2. Циліндричні полярні координати:  
(а) – координатні лінії та одиничні орти системи,  
(б) – координатні поверхні

**Координатними поверхнями** циліндричних полярних координат (рис. 4.2(б)) є:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = q_1^0$  – кругові циліндри з віссю Oz;

$\varphi = \arctg(y/x) = q_2^0$  – напівплощини, що обмежені віссю Oz;

$z = q_3^0$  – площини, що перпендикулярні осі Oz.

**Координатні лінії** циліндричних полярних координат являють собою (рис. 4.(a)):

прямі, перпендикулярні вісі Oz (координатні лінії  $q_1 = \rho$ );

кола із центром на вісі Oz в перпендикулярній цій вісі площині (координатні лінії  $q_2 = \varphi$ );

прямі, що паралельні осі Oz (координатні лінії  $q_3 = z$ ).

### Задачі до параграфа 4.2.1

**4.2.1.1.** Обчислити коефіцієнти Ламе й фундаментальний метричний тензор циліндричних полярних координат (4.16).

**4.2.1.2.** Знайти проєкції ортів ( $\vec{e}_i$ ) циліндричних полярних координат (4.16) на вісі декартової системи координат ( $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$ ).

**4.2.1.3.** Знайти квадрат елемента дуги в циліндричних координатах (4.16).

**4.2.1.4.** Чому дорівнює елемент об'єму в циліндричних координатах (4.16).

**4.2.1.5.** Знайти швидкість матеріальної точки і її кінетичну енергію в циліндричних координатах (4.16).

**4.2.1.6.** Знайти прискорення матеріальної точки в циліндричних координатах (4.16).

**4.2.1.7.** Скласти фундаментальний метричний тензор і знайти елемент дуги для криволінійних координат

$$\begin{cases} u = \ln(x^2 + y^2); \\ v = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right); \\ w = z. \end{cases}$$

Як ця система координат співвідноситься із циліндричною системою?

**4.2.1.8.** Скласти фундаментальний метричний тензор і знайти елемент дуги для криволінійних координат

$$\begin{cases} x = u v; \\ y = u \sqrt{1 - v^2}; \\ z = w. \end{cases}$$

Як ця система координат співвідноситься із циліндричною полярною системою?

## 4.2.2. Циліндричні еліптичні координати

Циліндричні еліптичні координати узагальнюють на тривимірний випадок розглянуті в § 2.3 плоскі еліптичні координати. Для них можливі різні зображення. Скористаємося зв'язком з декартовими координатами, який обговорювався в задачі 2.3.2 при  $\sigma = 1$ . В цьому разі співвідношення (4.2) набувають вигляду

$$x = \sin q_1 \operatorname{ch} q_2; \quad y = \cos q_1 \operatorname{sh} q_2; \quad z = q_3. \quad (4.17)$$

З них впливає вигляд координатних поверхонь і координатних ліній.

**Координатними поверхнями** циліндричних еліптичних координат (рис. 4.3(б)) є:

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 q_2^0} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 q_2^0} = 1 \text{ – еліптичні циліндри з напрямною уздовж вісі } Oz;$$

$$\frac{x^2}{\sin^2 q_1^0} - \frac{y^2}{\cos^2 q_1^0} = 1 \text{ – гіперболічні циліндри уздовж вісі } Oz;$$

$z = q_3^0$  – площини, перпендикулярні вісі  $Oz$ .

**Координатні лінії** являють собою (рис. 4.3(а)) еліпси  $q_1$ , гіперболи  $q_2$  та прямі  $q_3 = z$  уздовж осі  $Oz$ .

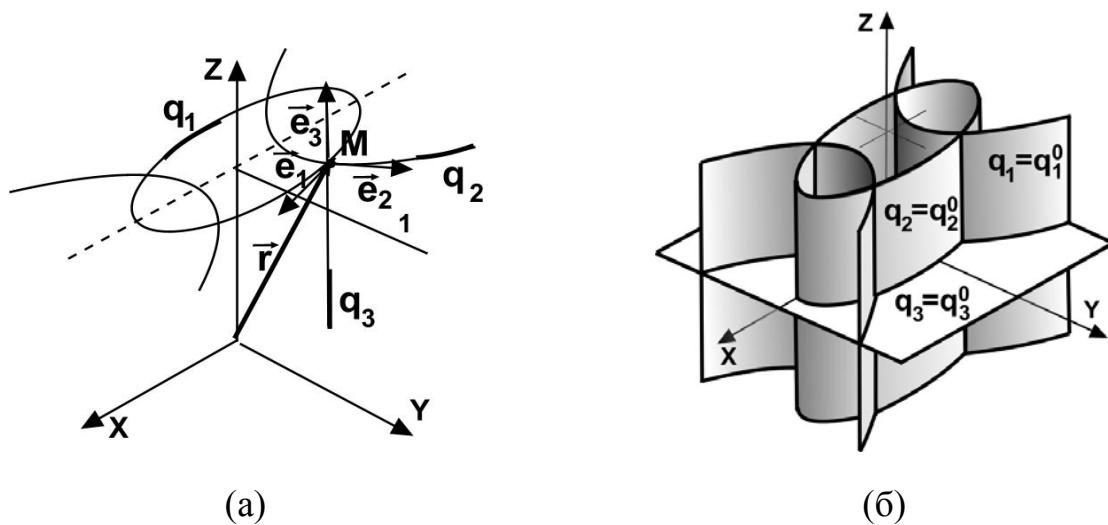


Рис. 4.3. Циліндричні еліптичні координати:  
(а) – координатні лінії та одиничні орти системи;  
(б) – координатні поверхні

### Задача до параграфу 4.2.2

**4.2.2.1.** Скласти фундаментальний метричний тензор і знайти елемент дуги для циліндричних еліптичних координат (4.17).

### 4.2.3. Циліндричні параболічні координати

Циліндричні параболічні координати узагальнюють на тривимірний випадок розглянуті в § 2.4 плоскі еліптичні координати. Скористаємося зв'язком з декартовими координатами, що обговорювався в задачі 2.4.2. За такої умови (4.2). набувають вигляду

$$x = \frac{q_1^2 - q_2^2}{2}; \quad y = q_1 q_2; \quad z = q_3. \quad (4.18)$$

З них впливає вигляд координатних поверхонь та координатних ліній.

**Координатними поверхнями** циліндричних параболічних координат є (рис. 4.4(б)):

$$x = \frac{1}{2} \left( q_1^{(0)2} - \frac{y^2}{q_1^{(0)2}} \right); \quad x = \frac{1}{2} \left( -q_2^{(0)2} + \frac{y^2}{q_2^{(0)2}} \right) - \text{дві сім'ї параболічних}$$

циліндрів з напрямною уздовж Oz;

$$z = q_3^0 - \text{площини, перпендикулярні вісі Oz};$$

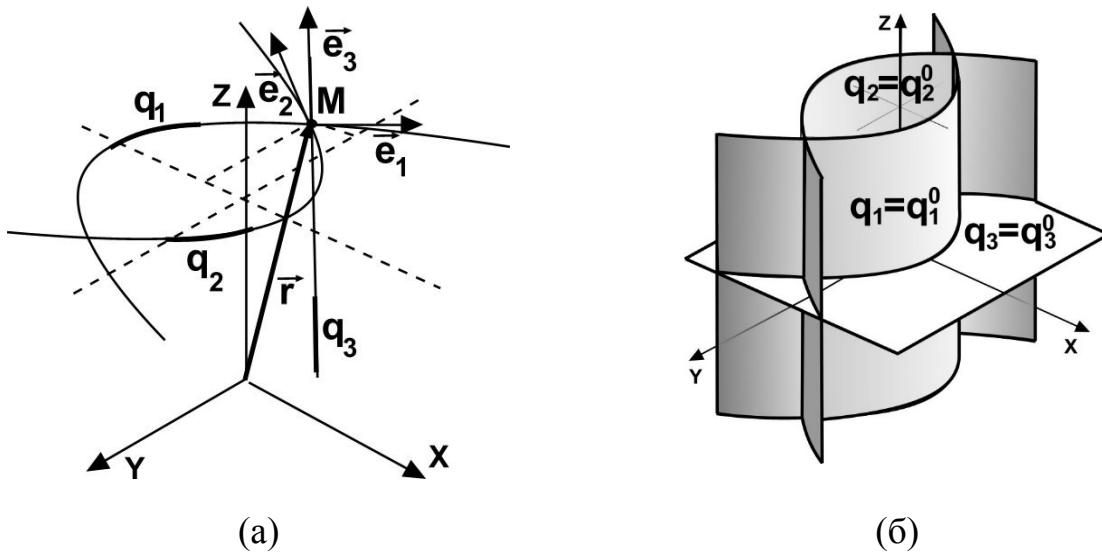


Рис. 4.4. Циліндричні параболічні координати:  
 (а) – координатні лінії та одиничні орти системи,  
 (б) – координатні поверхні

**Координатні лінії** циліндричних параболічних координат (рис. 4.4а). – параболы  $q_1 = q_1^0$ ,  $q_2 = q_2^0$  та прямі  $q_3 = q_3^0$  уздовж осі Oz.

### Задача до параграфа 4.2.3

**4.2.3.1.** Скласти фундаментальний метричний тензор і знайти елемент дуги для циліндричних параболічних координат (4.18)..

## 4.3. Обертально-симетричні координати

Обертально-симетричні тривимірні координати утворюються із двовимірної координатної системи обертанням на кут  $\varphi$  навколо однієї з вісей симетрії плоских координат. Такі координати є ортогональними, якщо є ортогональною відповідна система плоских координат.

Для побудови загальних обертально-симетричних координат з віссю обертання Oz з відповідних плоских координат  $(u, v)$  слід вважати, що



$u = u(z, \rho)$ ,  $v = v(z, \rho)$  та  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ . В окремому випадку ортогональних обертально-симетричних координат це перетворення повинне мати вигляд  $u + iv = f(z + i\rho)$ , де  $f$  – довільна аналітична функція.

Прикладами загальних циліндричних координат є, наприклад, сферичні координати, параболічні координати обертання, тороїдальні координати тощо.

### 4.3.1. Сферичні координати

У сферичних координатах положення точки визначається координатами  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$  (рис. 4.5(a)), пов'язаними з декартовими співвідношеннями

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta. \quad (4.19)$$

Змінюючи координати в таких інтервалах

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

можна описати всі точки тривимірного простору.

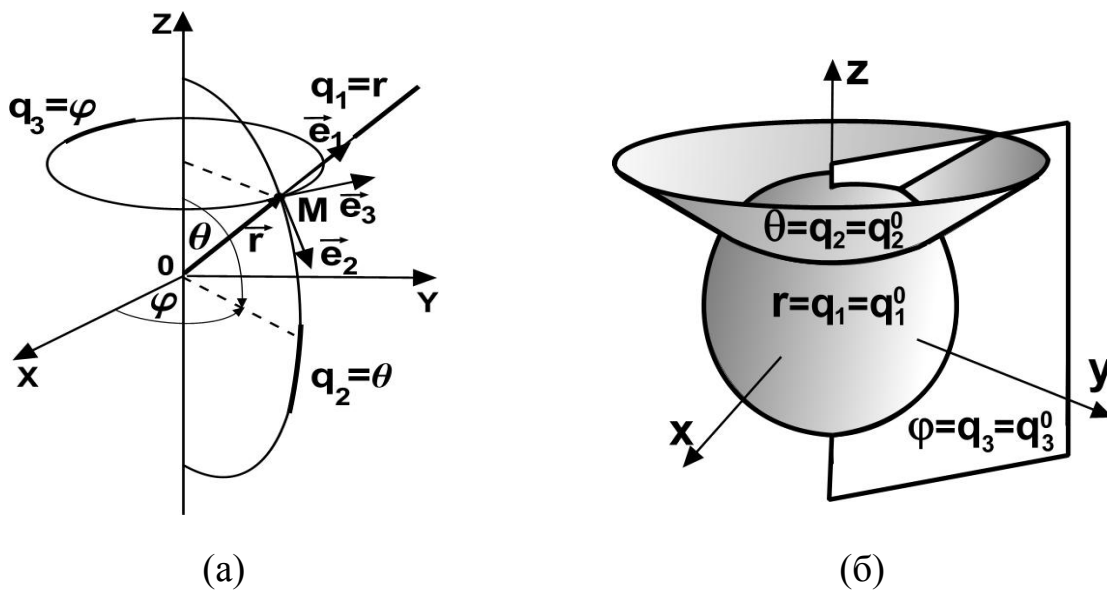


Рис. 4.5. Сферичні координати:  
(а) – координатні лінії та одиничні орти;  
(б) – координатні поверхні

**Координатними поверхнями** сферичних координат є (рис. 4.5(б))

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = q_1^0$  – сфери із центром на початку координат;

$$\theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = q_2^0 - \text{напівконуси з віссю обертання } Oz;$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = q_3^0 - \text{напівплощини, обмежені віссю } Oz.$$

**Координатні лінії** сферичних координат являють собою (рис. 4.5(а)) радіуси із центра координатної системи (напівпрямі  $r$ );

«меридіани» (півкола  $\theta$  з  $r = q_1^0$ ;  $\varphi = q_3^0$ );

«паралелі» (кола  $\varphi$  з  $r = q_1^0$ ;  $\theta = q_2^0$ ).

### Задачі до параграфа 4.3.1

**4.3.1.1.** Побудуйте сферичні координати із плоских полярних координат.

**4.3.1.2.** Обчислити фундаментальний метричний тензор сферичної системи координат (4.19)..

**4.3.1.3.** Написати проєкції ортів  $\vec{e}_i$  сферичних координат (4.19). на вісі декартової системи координат.

**4.3.1.4.** Знайти квадрат елемента довжини дуги в сферичних координатах (4.19)..

**4.3.1.5.** Чому дорівнює елемент об'єму в сферичних координатах (4.19).

**4.3.1.6.** Знайти швидкість матеріальної точки та її кінетичну енергію в сферичних координатах (4.19).

**4.3.1.7.** Знайти прискорення матеріальної точки в сферичних координатах (4.19).

### 4.3.2. Еліптичні координати обертання

Такі координати зручно використовувати, наприклад, у задачі про рух частинки в полі двох радіально симетричних потенціалів [12 : 198]. «Вихідними» для цих координат є плоскі еліптичні координати, розглянуті в § 2.3. Їхнє тривимірне узагальнення може бути різним залежно від вибору осі симетрії обертання.

Виберемо в якості декартових координат  $(x, y)$  у формулах (2.26) координати  $(\rho, z)$  з віссю обертання  $Oz$ . При цьому рис. 2.5(б) приймає вигляд рис. 4.6(а), а формули (2.26) перетворяться так

$$\rho = \sqrt{(q_2^2 - 1)(1 - q_1^2)}; \quad z = q_1 q_2. \quad (4.20)$$

Обертання плоскої координатної системи навколо осі  $Oz$  на кут  $\varphi = q_3$  призводить до еліптичних координат обертання («координатам витягнутого еліпсоїда обертання»)

$$x = \sqrt{(q_2^2 - 1)(1 - q_1^2)} \cos q_3; \quad y = \sqrt{(q_2^2 - 1)(1 - q_1^2)} \sin q_3; \quad z = q_1 q_2. \quad (4.21)$$

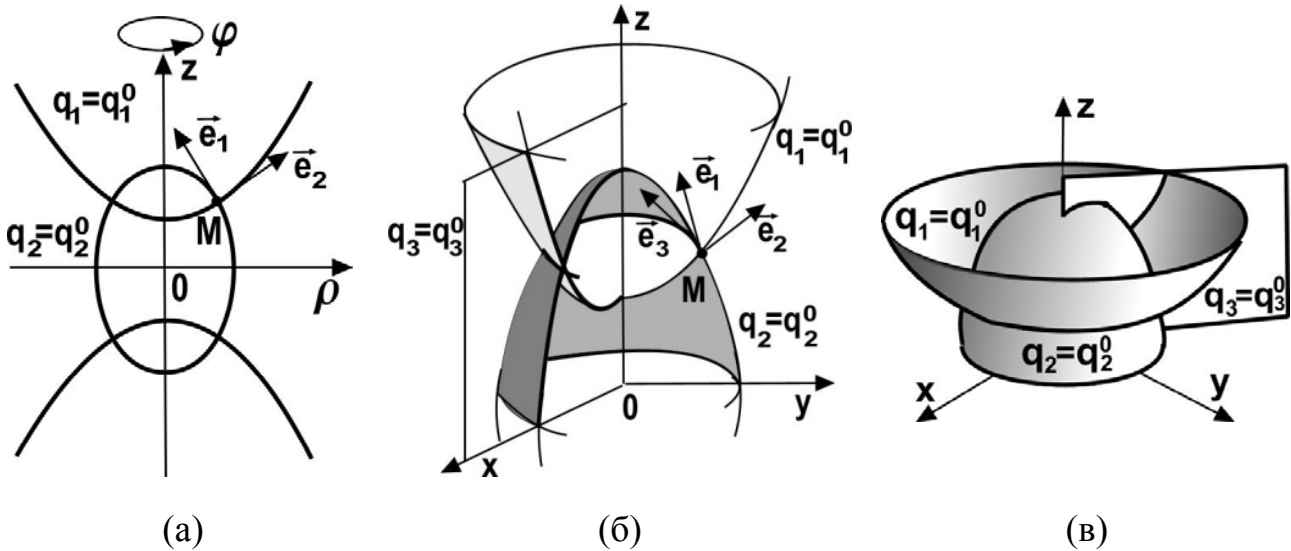


Рис. 4.6. Еліптичні координати витягнутого еліпсоїда обертання:

(а), (б) – координатні лінії та одиничні орти;

(б), (в) – координатні поверхні

**Координатними поверхнями** криволінійних координат витягнутого еліпсоїда обертання (див. рис. 4.6(б), (в)), на яких зображені півпростори  $z > 0$  є

$$\frac{x^2 + y^2}{[(q_2^{(0)})^2 - 1]} + \frac{z^2}{(q_2^{(0)})^2} = 1 - \text{еліпсоїди обертання із центром на початку}$$

координат ( $q_2 > 1$ );

$$\frac{z^2}{(q_1^{(0)})^2} - \frac{x^2 + y^2}{[1 - (q_1^{(0)})^2]} = 1 - \text{двопорожнинні гіперболоїди обертання із}$$

центром на початку координат ( $q_1 < 1$ );

$$\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = q_3^0 - \text{напівплощини, обмежені віссю } Oz.$$

**Координатні лінії** криволінійних координат витягнутого еліпсоїда обертання являють собою (рис. 4.6(а), (б)) витягнуті уздовж осі  $Oz$  еліпси; гіперболи та перпендикулярні осі  $Oz$  кола.

Інша можливість пов'язана з перестановкою декартових координат  $(x, y)$  у формулах (2.26) і переходом до координат  $(z$  з віссю обертання  $Oz)$ .

При цьому рис. 2.5(б) приймає вигляд рис. 4.7(а), а формули (2.26) перетворюються так

$$\rho = q_1 q_2; \quad z = \sqrt{(q_2^2 - 1)(1 - q_1^2)}. \quad (4.22)$$

Обертання плоскої координатної системи навколо осі Oz на кут  $\varphi = q_3$  призводить до еліптичних координат обертання («координатам сплющеного еліпсоїда обертання»)

$$x = q_1 q_2 \cos q_3; \quad y = q_1 q_2 \sin q_3; \quad z = \sqrt{(q_2^2 - 1)(1 - q_1^2)}. \quad (4.23)$$

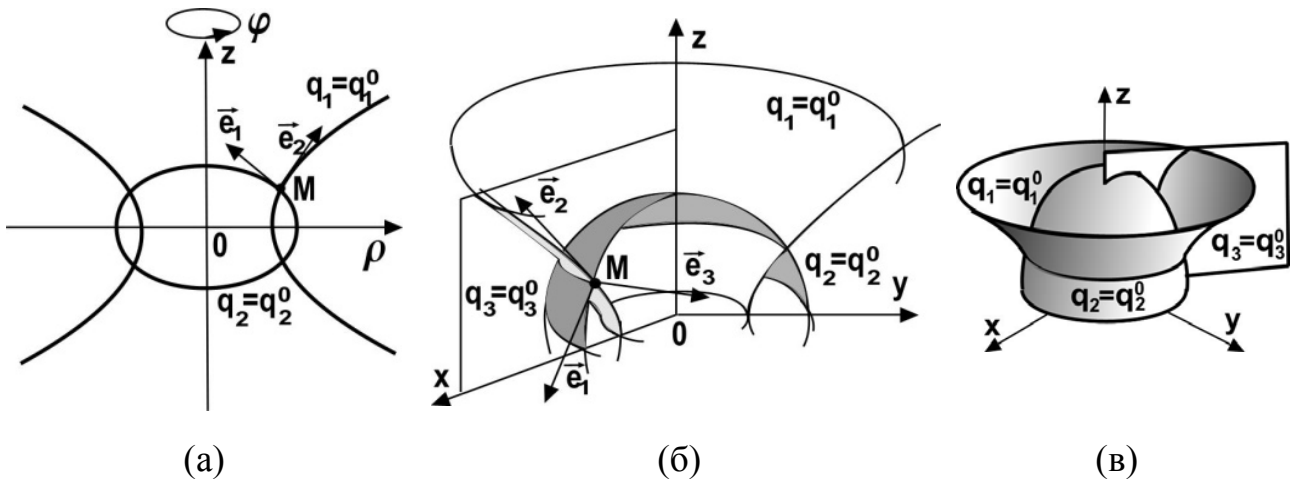


Рис. 4.7. Еліптичні координати сплющеного еліпсоїда обертання:  
(а), (б) – координатні лінії й одиничні орти системи;  
(б), (в) – координатні поверхні

**Координатними поверхнями** еліптичних координат сплющеного еліпсоїда є (див. рис. 4.7(б), (в), на яких зображені півпростори  $z > 0$ )

$$\frac{x^2 + y^2}{(q_2^{(0)})^2} + \frac{z^2}{(q_2^{(0)})^2 - 1} = 1 - \text{еліпсоїди обертання із центром на початку}$$

координат ( $q_2 > 1$ );

$$\frac{x^2 + y^2}{(q_1^{(0)})^2} - \frac{z^2}{1 - (q_1^{(0)})^2} = 1 - \text{однопорожнинні гіперболоїди обертання із}$$

центром на початку координат ( $q_1 < 1$ );

$$\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = q_3^0 - \text{напівплощини, обмежені віссю Oz.}$$

### Задачі до параграфу 4.3.2

**4.3.2.1.** Знайти коефіцієнти Ламе та фундаментальний метричний тензор координат витягнутого еліпсоїда обертання (4.21).

**4.3.2.2.** Знайти коефіцієнти Ламе й фундаментальний метричний тензор координат сплющеного еліпсоїда обертання (4.23).

### 4.3.3. Параболічні координати обертання

Такі координати використовуються, наприклад, при розв'язанні задачі про рух частинки при одночасному розгляданні відцентрово-симетричних та однорідних полів [12 : 198].

Параболічні координати обертання утворюються обертанням плоских параболічних координат, розглянутих у § 2.4. Перепишемо зв'язок декартових  $(\rho, z)$  і плоских параболічних  $(q_1, q_2)$  координат (2.29) у вигляді

$$\rho = \sqrt{q_1 q_2}; \quad z = \frac{1}{2}(q_2 - q_1). \quad (4.24)$$

Обертання плоскої координатної системи навколо осі  $Oz$  на кут  $\varphi = q_3$  призводить до появи параболічних координат обертання

$$x = \sqrt{q_1 q_2} \cos q_3; \quad y = \sqrt{q_1 q_2} \sin q_3; \quad z = \frac{1}{2}(q_2 - q_1). \quad (4.25)$$

**Координатними поверхнями** параболічних координат обертання є (рис. 4.8(б)):

$$z = \frac{1}{2} \left( q_2^0 - \frac{x^2 + y^2}{q_2^0} \right) - \text{сім'я параболоїдів обертання } (q_2 > 1);$$

$$z = \frac{1}{2} \left( -q_1^0 + \frac{x^2 + y^2}{q_1^0} \right) - \text{сім'я параболоїдів обертання } (q_1 < 1);$$

$$\varphi = \arctg \left( \frac{y}{x} \right) = q_3^0 - \text{напівплощини, обмежені віссю } Oz.$$

**Координатні лінії** параболічних координат обертання являють собою дві сімї парабол та окружності  $x^2 + y^2 = q_1^0 q_2^0$  (рис. 4.8(а)).

#### Задачі до параграфа 4.3.3

**4.3.3.1.** Знайти коефіцієнти Ламе й фундаментальний метричний тензор параболічних координат обертання (4.25).

**4.3.3.2.** Знайти квадрат елемента дуги та елемент об'єму параболічних координат обертання (4.25).

**4.3.3.3.** Розглянути криволінійні координати типу

$$q_1 = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z}; \quad q_2 = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z}; \quad q_3 = \arctg \left( \frac{y}{x} \right).$$

Знайти для них обернене перетворення, коефіцієнти Ламе, фундаментальний метричний тензор, формули для координатних поверхонь та вирази для елементів дуги й об'єму.

#### 4.3.3.4. Розглянути криволінійні координати виду

$$x = q_1 q_2 q_3; \quad y = q_1 q_2 \sqrt{1 - q_3^2}; \quad z = \frac{1}{2}(q_2^2 - q_1^2).$$

Знайти для них коефіцієнти Ламе, фундаментальний метричний тензор, формули для координатних поверхонь та вирази для елементів дуги й об'єму.

#### 4.3.4. Тороїдальні координати

Тривимірні тороїдальні координати є узагальненням двовимірних біполярних координат, розглянутих у § 2.5 та утворюються їхнім обертанням навколо осі симетрії. Перепишемо декартові та біполярні координати в позначеннях

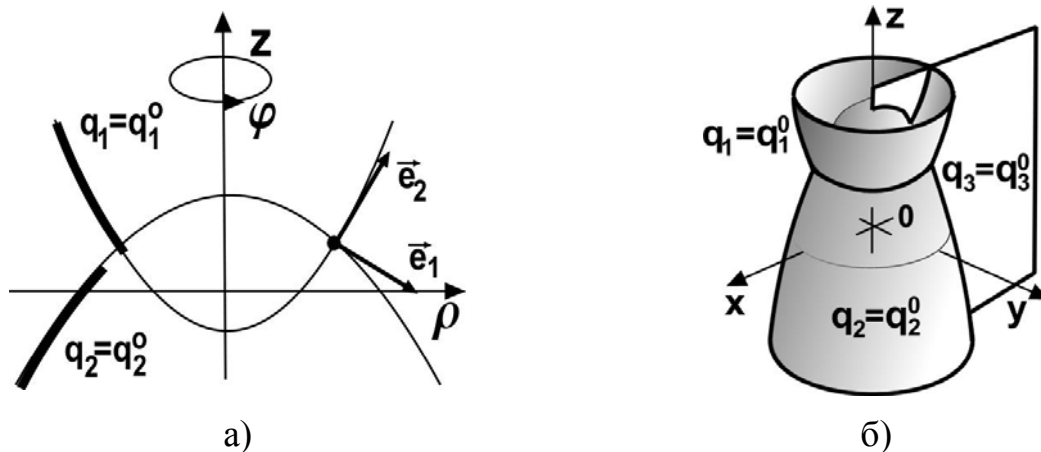


Рис. 4.8. Параболічні координати обертання:

(а) – координатні лінії та одиничні орти,

(б) – координатні поверхні

цього розділу:  $(x, y) \rightarrow (\rho, z)$ ,  $(u, v) \rightarrow (q_1, q_2)$  та запишемо (2.34) у вигляді

$$\rho = \frac{\text{sh } q_1}{\text{ch } q_1 + \cos q_2}; \quad z = \frac{\sin q_2}{\text{ch } q_1 + \cos q_2}. \quad (4.26)$$

Обертання плоскої координатної системи навколо Oz на кут  $\varphi = q_3$  призводить до появи тороїдальних координат

$$x = \frac{\text{sh } q_1 \cos q_3}{\text{ch } q_1 + \cos q_2}; \quad y = \frac{\text{sh } q_1 \sin q_3}{\text{ch } q_1 + \cos q_2}; \quad z = \frac{\sin q_2}{\text{ch } q_1 + \cos q_2}. \quad (4.27)$$

Координатні поверхні являють собою сім'ю торів, дві сім'ї кульових поверхонь і напівплощини (рис. 4.9(б)).

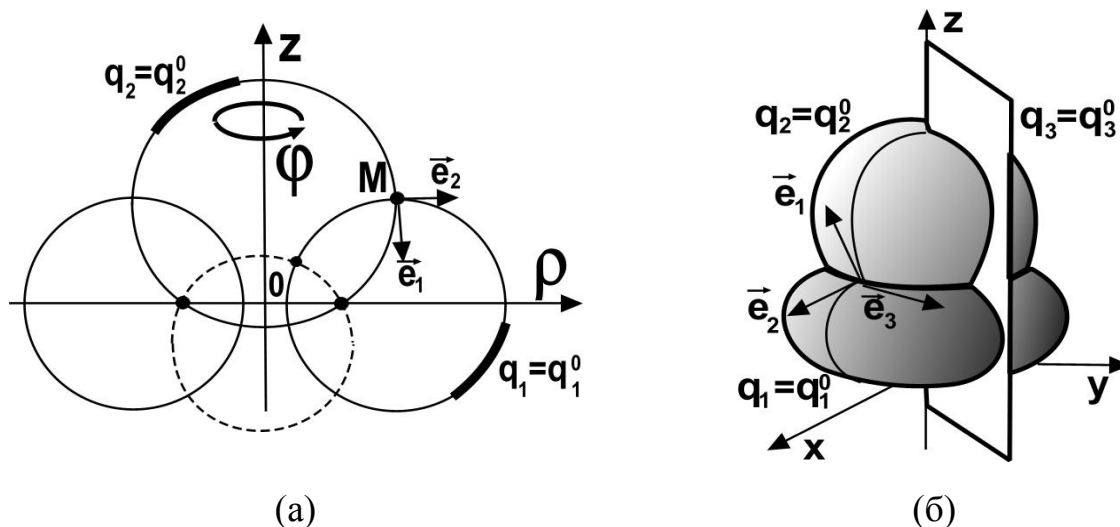


Рис. 4.9. Тороїдальні координати:  
(а) – координатні лінії та одиничні орти;  
(б) – координатні поверхні.

На рис. 4.9(б) зображена тільки одна із двох координатних сфер.

**Координатними поверхнями** тороїдальних координат (рис. 4.9(б)) є: дві сім'ї (при різних значеннях  $q_2^0$ ) кульових поверхонь із віссю обертання  $Oz$ , що проходять через коло одиничного радіуса на площині  $(x, y)$ ;

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{cth} q_1^0\right)^2 + z^2 = \operatorname{cosech}^2(q_1^0) - \text{сім'я торів з окружностями}$$

в перетині, віссю симетрії  $Oz$ , що проходить через коло одиничного радіуса на площині  $(x, y)$ ;

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = q_3^0 - \text{напівплощини, обмежені віссю } Oz.$$

**Координатні лінії** являють собою дві сім'ї кіл у перетинах куль і торів та кола  $\rho = \text{const}$  (рис. 4.9(б)).

### Задача до параграфа 4.3.4

#### 4.3.4.1. Розглянути криволінійні координати типу

$$\begin{cases} x = (1 + \rho \cos \varphi) \cos \psi; \\ y = (1 + \rho \cos \varphi) \sin \psi; \\ z = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (4.28)$$

Знайти для них коефіцієнти Ламе, фундаментальний метричний тензор, вирази для елементів дуги й об'єму.

### 4.3.5. Розв'язки та відповіді до розділу 4

**4.1.1.** Проекція вектора  $\vec{A}$  на вісь криволінійних координат за визначенням являє собою скалярний добуток вектора  $\vec{A}$  та орта  $\vec{e}_i$ , спрямованого по дотичній до координатної лінії  $q_i$

$$A_i = (\vec{A}, \vec{e}_i); \quad i = 1, 2, 3.$$

Компоненти векторів  $\vec{e}_i$  визначаються формулами (4.10), що дає

$$A_i = (\vec{A}, \vec{e}_i) = \frac{1}{h_i} \left( A_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + A_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + A_z \frac{\partial z}{\partial q_i} \right); \quad i = 1, 2, 3.$$

**4.1.2.** З формули (4.6) та співвідношень (4.8) маємо

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3.$$

звідки швидкість матеріальної точки в криволінійних координатах дорівнює

$$\vec{V} = h_1 \dot{q}_1 \vec{e}_1 + h_2 \dot{q}_2 \vec{e}_2 + h_3 \dot{q}_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 h_i \dot{q}_i \vec{e}_i. \quad (4.29)$$

Отже, кінетична енергія дорівнює

$$T = \sum_i h_i^2 \frac{m \dot{q}_i^2}{2}. \quad (4.30)$$

**4.1.3.** Скориставшись формулами (4.10) отримаємо

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x}{\partial q_i} \vec{i}_x + \frac{1}{h_i} \frac{\partial y}{\partial q_i} \vec{i}_y + \frac{1}{h_i} \frac{\partial z}{\partial q_i} \vec{i}_z, \quad i = 1, 2, 3.$$

**4.1.4.** Скориставшись формулами (4.10) отримаємо

$$\vec{i}_x = \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \vec{e}_3;$$

$$\vec{i}_y = \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} \vec{e}_3;$$

$$\vec{i}_z = \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \vec{e}_3.$$



**4.1.5.** Для знаходження прискорення точки в криволінійних координатах можна скористатися виразом (4.29) для швидкості із задачі 4.1.2 та продиференціювати його за часом. При цьому треба мати на увазі, що при зміні координати частинки з часом у криволінійних координатах змінюється також напрямок одиничних ортів. Тому

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \sum_i \left( \ddot{q}_i h_i \vec{e}_i + \dot{q}_i \dot{h}_i \vec{e}_i + \dot{q}_i h_i \dot{\vec{e}}_i \right). \quad (4.31)$$

З розв'язків задач 4.1.3 і 4.1.4 виходить, що

$$\dot{\vec{e}}_i = \sum_k \vec{e}_k \left[ \frac{1}{h_k} \frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{h_i} \frac{\partial x}{\partial q_i} \right) + \frac{1}{h_k} \frac{\partial y}{\partial q_k} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{h_i} \frac{\partial y}{\partial q_i} \right) + \frac{1}{h_k} \frac{\partial z}{\partial q_k} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{h_i} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \right].$$

З визначення коефіцієнтів Ламе випливає, що в цій сумі залишаються тільки члени з  $k \neq i$ . Отже, остаточний вираз виглядає так

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \sum_i \vec{e}_i \left( \ddot{q}_i h_i + \dot{q}_i \dot{h}_i \right) + \\ & + \sum_{i \neq k} \vec{e}_i \dot{q}_k \frac{h_k}{h_i} \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{h_k} \frac{\partial x}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{h_k} \frac{\partial y}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{h_k} \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \right). \end{aligned}$$

**4.2.1.1.** У циліндричних полярних координатах  $\vec{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$  маємо

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0); \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0); \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

Коефіцієнти Ламе дорівнюють

$$h_\rho = 1; \quad h_\varphi = \rho; \quad h_z = 1.$$

Відповідно до визначення фундаментального метричного тензора (4.12) в циліндричних полярних координатах його компоненти мають вигляд

$$\begin{aligned} g_{\rho\rho} &= h_{\rho\rho}^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1; \\ g_{\varphi\varphi} &= h_{\varphi\varphi}^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2; \\ g_{zz} &= 1; \\ g_{\rho\varphi} &= -\rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho \cos \varphi \sin \varphi = 0; \\ g_{\rho z} &= 0; \quad g_{\varphi z} = 0. \end{aligned}$$

Так, фундаментальний метричний тензор для циліндричних полярних координат є діагональним:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Циліндричні координати є ортогональними координатами.

**4.2.1.2.** Проекції ортів циліндричної полярної системи на осі декартової визначаються формулами (4.9) та дорівнюють

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0); \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0); \\ \vec{e}_z &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Обернене перетворення знаходиться за формулами, отриманими у задачі 4.1.4

$$\begin{aligned} \vec{i}_x &= \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi; \\ \vec{i}_y &= \sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi; \\ \vec{i}_z &= \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (4.33)$$

**4.2.1.3.** Квадрат елемента довжини дуги в циліндричних координатах дорівнює

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

**4.2.1.4.** Елемент об'єму в циліндричних координатах дорівнює

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

**4.2.1.5.** Skorиставшись результатами задачі 4.1.2 і видом коефіцієнтів Ламе знаходимо швидкість

$$\vec{V} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho^2 \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z; \quad (4.34)$$

та кінетичну енергію

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \quad (4.35)$$

**4.2.1.6.** Продиференціювавши за часом вираз (4.34) для швидкості із задачі 4.2.1.5, вирази для ортів із задачі 4.2.1.2 і підставивши співвідношення ортів у двох координатних системах із задачі 4.2.1.2 отримаємо

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z. \quad (4.36)$$

Формулу (4.36) можна отримати з результату задачі 4.1.5.

Зауважимо, що знайдений вираз для прискорення можна уявити у вигляді

$$m\vec{a} = \vec{e}_\rho \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \vec{e}_\varphi \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

**4.2.1.7.** Фундаментальний метричний тензор та елемент дуги дорівнюють

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} e^{u/2}/4 & 0 & 0 \\ 0 & e^{u/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad dl^2 = e^u \left( \frac{1}{4} du^2 + dv^2 \right) + dz^2.$$

Заміна

$$x = e^{u/2} \cos v, \quad y = e^{u/2} \sin v, \quad z = w$$

зводить ці криволінійні координати до циліндричних полярних координат. На відміну від звичайних циліндричних координат, в яких  $\rho$  змінюється в інтервалі  $0 \leq \rho < \infty$ , у розглянутих координатах  $u$  змінюється на всій осі  $-\infty < u < \infty$ .

**4.2.1.8.** Фундаментальний метричний тензор і елемент дуги дорівнюють

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u^2}{1-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad dl^2 = du^2 + \frac{u^2}{1-v^2} dv^2 + dw^2.$$

Заміна змінних

$$u = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad v = \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad z = w$$

зводить цю систему координат до циліндричних полярних координат.

**4.2.2.1.** Фундаментальний метричний тензор та елемент дуги дорівнюють

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \cos^2 q_1 + \operatorname{sh}^2 q_2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 q_1 + \operatorname{sh}^2 q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$dl^2 = (\cos^2 q_1 + \operatorname{sh}^2 q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + dq_3^2.$$

**4.2.3.1.** Фундаментальний метричний тензор та елемент дуги дорівнюють

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} q_1^2 + q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_1^2 + q_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad dl^2 = (q_1^2 + q_2^2)(dq_1^2 + dq_2^2) + dq_3^2.$$

**4.3.1.1.** В § 2.2 полярні координати перетворювалися з декартових за допомогою формул (2.18), (2.19). Введемо замість декартових координат  $(x, y)$  декартові координати  $(\rho, z)$  та циліндричні координати  $(r, \theta)$  за формулами (2.18), (2.19)

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}; \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{z}\right)$$

або

$$z = r \cos \theta; \quad \rho = r \sin \theta.$$

Після цього обертанням площини  $(\rho, z)$  навколо осі  $z$  на кут  $\varphi$  отримуємо сферичні координати

$$x = \rho \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi;$$

$$y = \rho \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi;$$

$$z = z = r \cos \theta.$$

**4.3.1.2.** У сферичних координатах

$\vec{r} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$  Коефіцієнти Ламе дорівнюють

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$$

Похідні від декартових координат по сферичним мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta); \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta); \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0)\end{aligned}$$

За формулою (4.12) знаходимо компоненти фундаментального метричного тензора

$$\begin{aligned}g_{rr} = h_r^2 = 1; \quad g_{\theta\theta} = h_\theta^2 = r^2; \quad g_{\varphi\varphi} = h_\varphi^2 = r^2 \sin^2 \theta; \\ g_{r\theta} = g_{r\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0.\end{aligned}$$

Отже, фундаментальний метричний тензор для сферичних координат є діагональним

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

і ці координати є ортогональними.

**4.3.1.3.** Проекції ортів сферичної координатної системи на осі декартової визначаються формулами (4.9) та дорівнюють

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta); \\ \vec{e}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta); \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).\end{aligned} \tag{4.37}$$

Обернені перетворення знаходяться за формулами, отриманими у задачі 4.1.4

$$\begin{aligned}\vec{i}_x &= \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi; \\ \vec{i}_y &= \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_\theta + \cos \varphi \vec{e}_\varphi; \\ \vec{i}_z &= \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta.\end{aligned} \tag{4.38}$$

**4.3.1.4.** Квадрат елемента довжини дуги в сферичних координатах дорівнює

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

**4.3.1.5.** Елемент об'єму в сферичних координатах дорівнює

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

**4.3.1.6.** Skorиставшись результатами задачі 4.1.2 та виглядом коефіцієнтів Ламе знаходимо

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi; \quad (4.39)$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (4.40)$$

Помітимо, що вираз для кінетичної енергії можна одержати і з розв'язку задачі 4.3.1.4 для елемента довжини в сферичних координатах

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Розділивши цей вираз на  $dt^2$  отримаємо формулу (4.40) для кінетичної енергії.

**4.3.1.7.** Продиференціювавши за часом формулу (4.39) з задачі 4.3.1.6 для швидкості, формулу (4.37) для ортів із задачі 4.3.1.3 і підставивши співвідношення ортів у двох координатних системах із задачі 4.3.1.3 (формули (4.37), (4.38)) знаходимо

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\theta + \\ & + (r\sin \theta \ddot{\varphi} + 2\sin \theta \dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos \theta \vartheta \dot{\theta} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Цю ж формулу можна отримати з результату задачі 4.1.5.

Значимо, що знайдений вираз для прискорення можна уявити у вигляді

$$m \vec{a} = \frac{\vec{e}_r}{h_r} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\vec{e}_\theta}{h_\theta} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\vec{e}_\varphi}{h_\varphi} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right).$$

Звідси маємо, що

$$m \vec{a} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}},$$

де  $U$  – потенціальна енергія.

**4.3.2.1.** Коефіцієнти Ламе координат витягнутого еліпсоїда обертання дорівнюють

$$h_1 = \sqrt{\frac{q_2^2 - q_1^2}{1 - q_1^2}}; \quad h_2 = \sqrt{\frac{q_2^2 - q_1^2}{q_2^2 - 1}}; \quad h_3 = q_1 q_2,$$

а фундаментальний метричний тензор має вигляд

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{q_2^2 - q_1^2}{1 - q_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_2^2 - q_1^2}{q_2^2 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & q_1^2 q_2^2 \end{pmatrix}.$$

**4.3.2.2.** Коефіцієнти Ламе координат сплющеного еліпсоїда обертання такі

$$h_1 = \sqrt{\frac{q_2^2 - q_1^2}{1 - q_1^2}}; \quad h_2 = \sqrt{\frac{q_2^2 - q_1^2}{q_2^2 - 1}}; \quad h_3 = (q_2^2 - 1)(1 - q_1^2),$$

а фундаментальний метричний тензор має вигляд

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{q_2^2 - q_1^2}{1 - q_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_2^2 - q_1^2}{q_2^2 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & (q_2^2 - 1)(1 - q_1^2) \end{pmatrix}.$$

**4.3.3.1.** Коефіцієнти Ламе параболічних координат обертання мають вигляд

$$h_{q_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q_1 + q_2}{q_1}}; \quad h_{q_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q_1 + q_2}{q_2}}; \quad h_{q_3} = \sqrt{q_1 q_2},$$

а фундаментальний метричний тензор має вигляд

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{q_1 + q_2}{4q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_1 + q_2}{4q_2} & 0 \\ 0 & 0 & q_1 q_2 \end{pmatrix}$$

**4.3.3.2.** Квадрат елемента дуги й елемент об'єму параболічних координат обертання (4.25) дорівнюють відповідно

$$dl^2 = \frac{q_1 + q_2}{4} \left( \frac{dq_1^2}{q_1} + \frac{dq_2^2}{q_2} \right) + q_1 q_2 dq_3^2$$

та

$$V = \frac{q_1 + q_2}{4} dq_1 dq_2 dq_3.$$

**4.3.3.3.** Обернене перетворення для зазначених криволінійних координат має вигляд

$$x = q_1 q_2 \cos q_3; \quad y = q_1 q_2 \sin q_3; \quad z = \frac{q_1^2 - q_2^2}{2}.$$

Коефіцієнти Ламе

$$h_{q_1} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}; \quad h_{q_2} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}; \quad h_{q_3} = q_1 q_2.$$

Фундаментальний метричний тензор

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} q_1^2 + q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_1^2 + q_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & q_1^2 q_2^2 \end{pmatrix}.$$

Елементи довжини та об'єму

$$dl^2 = (q_1^2 + q_2^2)(dq_1^2 + dq_2^2) + q_1^2 q_2^2 dq_3^2;$$

$$dV = q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Координатні поверхні визначаються виразами

$$z = \frac{1}{2} \left[ -\left(q_2^{(0)}\right)^2 + \frac{x^2 + y^2}{\left(q_2^{(0)}\right)^2} \right]; \quad z = \frac{1}{2} \left[ \left(q_1^{(0)}\right)^2 - \frac{x^2 + y^2}{\left(q_1^{(0)}\right)^2} \right]; \quad y = x \operatorname{tg} q_3^{(0)}.$$

Отже, розглянуті координати є параболічними координатами обертання.

**4.3.3.4.** Коефіцієнти Ламе та метричний тензор мають вигляд

$$h_{q_1} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}; \quad h_{q_2} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}; \quad h_{q_3} = \frac{q_1 q_2}{\sqrt{1 - q_3^2}};$$



$$g_{ik} = \begin{pmatrix} q_1^2 + q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_1^2 + q_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q_1^2 q_2^2}{1 - q_3^2} \end{pmatrix}.$$

відповідно.

Елементи довжини та об'єму

$$dl^2 = (q_1^2 + q_2^2)(dq_1^2 + dq_2^2) + \frac{q_1^2 q_2^2}{1 - q_3^2} dq_3^2;$$

$$dV = \frac{q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2)}{\sqrt{1 - q_3^2}} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Координатні поверхні визначаються виразами

$$z = \frac{1}{2} \left[ -\left(q_2^{(0)}\right)^2 + \frac{x^2 + y^2}{\left(q_2^{(0)}\right)^2} \right]; \quad z = \frac{1}{2} \left[ \left(q_1^{(0)}\right)^2 - \frac{x^2 + y^2}{\left(q_1^{(0)}\right)^2} \right]; \quad y = \left( \frac{\sqrt{1 - \left(q_3^{(0)}\right)^2}}{q_3^{(0)}} \right) x,$$

тобто у перетинах  $q_3 = q_3^{(0)}$  маємо дві сім'ї парабол  $z = z(x^2 + y^2)$ .

Таким чином, розглянуті координати є параболічними координатами обертання.

**4.3.4.1.** Рівняння (4.28) задають рівняння тора з відстанню від центру утворюючої окружності до осі обертання  $R = 1$  та з радіусом утворюючої окружності  $\rho$  в параметричному вигляді.

Фундаментальний метричний тензор

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \rho \cos \varphi)^2 \end{pmatrix}.$$

Елементи довжини та об'єму

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + (1 + \rho \cos \varphi)^2 d\psi^2;$$

$$dV = \rho(1 + \rho \cos \varphi) d\rho d\varphi d\psi.$$

## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

---

---

1. Аппель П. Теоретическая механика В 2 т. Т. 1. Статика. Динамика материальной точки / Аппель П. – М. : Физматлит., 1960. – 515 с.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / И. И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.
3. Борисов А. Б. Основы нелинейной динамики / Борисов А. Б. – Екатеринбург. : Уро РАН, 2010. – 408 с.
4. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. I / Н. Н. Бухгольц – М. : Наука, 1969. – 468 с.
5. Езерская Е. В. Динамика материальной точки в ньютоновом и лагранжевом формализме: методические указания для самостоятельной работы студентов 2–3 курсов физического факультета / Е. В. Езерская, О. В. Усатенко, Т. С. Чебанова. – Х. : Харьковское межвузовское полиграфическое предприятие, 1989. – 51 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. М. : Наука, 1971. – 576 с.
7. Ковальов О. С. Малі коливання. I. Лінійні коливання : навч.-метод. посіб. / О. С. Ковальов, О. В. Єзерська, З. О. Майзеліс, Т. С. Чебанова. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2016. – 112 с.
8. Косевич А. М. Введение в нелинейную физическую механику / А. М. Косевич, А. С. Ковалев. – К. : Наук. думка, 1989. – 304 с.
9. Коткин Г. Л. Сборник задач по классической механике / Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо. – Ижевск : РХД, 2001. – 352 с.
10. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин – М. : Наука, 1965. – 426 с.
11. Ландау Л. Д. Теоретическая физика В 10 т. Т. I: Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 216 с.
12. Ландау Л. Д. Задачи по теоретической физике. Ч. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. А. Розенкевич. – Х. : ГНТИУ, 1935. – 120 с.
13. Ландау Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Л. М. Пятигорский. – М., Л. : ГИТТЛ, 1940. – 200 с.
14. Маркеев А. П. Теоретическая механика: учебник для университетов / Маркеев А. П. – М. : ЧеРо, 1999. – 572 с.
15. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.

16. Морс Ф. М. Методы теоретической физики В 2 т. Т. 1 / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. – М. : Издательство иностранной литературы, 1958. – 930 с.
17. Невзглядов В. Г. Теоретическая механика / В. Г. Невзглядов – М. : Физматгиз, 1959. – 584 с.
18. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / И. Ньютон – М. : Наука, 1989. – 688 с.
19. Ольховский И. И. Задачи по теоретической механике для физиков / И. И. Ольховський, К. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков. – М. : Изд-во МГУ, 1977. – 391 с.
20. Сборник задач по аналитической механике / Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко. – М. : Наука, 1980. – 320 с.
21. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Г. К. Суслов – М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1946. – 656 с.

Навчальне видання

**Єзерська** Олена Володимирівна  
**Ковальов** Олександр Семенович  
**Майзеліс** Захар Олександрович  
**Чебанова** Тетяна Сергіївна

**КЛАСИЧНА ДИНАМІКА  
У НЬЮТОНІВСЬКОМУ ТА ЛАГРАНЖЕВОМУ  
ФОРМАЛІЗМІ**

Навчально-методичний посібник

Відповідальний за випуск *О. І. Любімов*  
Коректор *Б. О. Хільська*  
Комп'ютерне верстання *В. В. Савінкова*  
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 8,45. Наклад 100 пр. Зам. № 166/17.

Видавець і виготовлювач  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,  
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009  
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна  
Тел. 705-24-32